



École Doctorale 353 - Sciences pour l'ingénieur  
Spécialité : mécanique et physique des fluides

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Yixian ZHOU

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Université d'Aix-Marseille

---

# Éjection de gaz et de grains suite à la rupture d'un crayon de combustible nucléaire : modélisation de la dynamique

---

Soutenue le 2 Novembre 2016 devant le jury composé de :

Monsieur	Éric CLÉMENT	<i>PMMH, ESPCI</i>	Rapporteur
Madame	Valérie VIDAL	<i>Laboratoire de Physique, ENS Lyon</i>	Rapporteur
Monsieur	Pascal FEDE	<i>IMFT, Université de Toulouse</i>	Examineur
Monsieur	Farhang RADJAI	<i>LMGC, Université de Montpellier</i>	Examineur
Madame	Pascale AUSSILLOUS	<i>IUSTI, Université d'Aix-Marseille</i>	Directrice de Thèse
Monsieur	Pierre-Yves LAGRÉE	<i>IJLRA, Université Pierre et Marie Curie</i>	Co-encadrant de Thèse
Monsieur	Pierre RUYER	<i>IRSN</i>	Tuteur de Thèse

Laboratoire IUSTI  
École Polytechnique Universitaire de  
Marseille  
5, Rue Enrico Fermi, Technopôle de  
Château-Gombert  
13453 Marseille

École Doctorale Sciences pour  
l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro  
et Nanoélectronique  
5, Rue Enrico Fermi, Technopôle de  
Château-Gombert  
13453 Marseille

## Remerciement

Je voudrais commencer par remercier mes encadrants de thèse, Pascale Aussillous, Pierre Ruyer et Pierre-Yves Lagrée. J'ai eu énormément de plaisir à travailler avec eux. Pascale, je te remercie non seulement pour ta formation scientifique très enrichissante, mais aussi pour ta confiance, ton optimisme, ta patience et ton soutien au cours de ces trois années. Tes réponses pour mes nombreuses questions (dès fois naïves) et tes conseils seront toujours un trésor qui me servira toute la vie. Pierre, merci pour tes commentaires et conseils extrêmement inspirants, et bien sûr, pour ta gentillesse et ta patience. Je suis toujours impressionnée par ta efficacité. Pierre-Yves, merci de m'avoir accueillie dans ton laboratoire, merci pour ta disponibilité et toutes les explications scientifiques que tu m'avais fournies. Ta connaissance très large sur le milieu granulaire et ta bonne humeur m'ont fait tant de plaisir durant mon travail à l'Institut Jean Le Rond d'Alembert.

Je tiens également à remercier Éric Clément et Valérie Vidal pour leur lecture de mon manuscrit et leurs commentaires, ainsi que Pascal Fede et Farhang Radjai d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Je leur suis très reconnaissante pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de recherche, ainsi que pour leurs remarques très encourageantes et intéressantes.

Merci à l'IRSN, qui m'a non seulement financé mais aussi, offert des nombreuses opportunités de découvrir non seulement la recherche en France, mais aussi la culture française que je trouve très riche. Je remercie toutes les personnes que j'ai rencontré pendant mes 4 premières mois passés à Cadarache. Je remercie Marc et Nicolas pour leurs travaux de correction qu'ils ont apporté avec un très grand soin à chaque fois. Merci Fabienne pour ses aides et discussions intéressantes, merci Frédéric pour son aide technique, merci aux Jean, Olivier, Frédérique et Tatiana pour votre gentillesse ; merci à tous les membres du bâtiment 700 pour leur gentillesse. Enfin, un grand merci aux amis que j'ai rencontré lors des activités organisés par l'IRSN, Faoulat, Adrien, Wei etc, merci pour tous les bons moments passés avec vous.

J'en profite aussi pour adresser ma gratitude à l'ensemble de l'équipe GEP. Un grand merci à Laurence pour tes aides et conseils lors de mes soucis ponctuels, tes éclats de rire et ton optimisme m'ont beaucoup impressionné. Je remercie aussi Blanche et Geoffroy pour les grands sourires et votre patience, ainsi que Babette, Bloen, Gilles, Maxime, Olivier, Yoël pour vos compétences scientifiques et discussions intéressantes. C'est un grand honneur pour moi de travailler avec vous. Je tiens aussi à remercier tous les stagiaires, thésards, et post-doc qui ont participé à mon quotidien, un grand merci à (ma petite) Marguerite pour tes rires et tes encouragements très fréquents. Merci à Cécile, Franco, Matthieu, Ouardia, et Saif pour votre bonnes humeurs, j'ai apprécié les bons moments passés avec vous. Merci à Antoine, Diego, Simon, Jean-François, Jon et Joris pour votre aides et discussions intéressantes. Je remercie aussi Zhenhai, le nouveau thésard, qui va continuer mon travail de thèse, pour tes nombreuses aides, je te souhaite une bonne continuation, n'hésite pas à me solliciter quand t'as un soucis. Votre accueil chaleureux et la bonne ambiance générale de l'équipe ont facilité mon adaptation dans cet environnement agréable de travail ; merci à tous. Je remercie tous les visiteurs que j'ai rencontré à l'IUSTI, Hervé, Chi-Yao, et Meberika, j'ai apprécié

de discuter avec vous non seulement sur des sujets scientifiques qui relèvent du même domaine et sujet de recherche mais aussi sur d'autres sujets multiculturels aux quotidiens.

Je remercie en outre le personnel technique et administratif du laboratoire de l'IUSTI. Merci donc à l'atelier de Frédéric, Paul et Sady, au service électronique de Nathalie, aux compétences informatiques de Yann, Julien, Lionel, aux personnels administratifs : Joyce, Delphine etc. Et enfin, côté École Doctorale, merci à Pascal, pour le grand soins que tu apportes à tous les doctorants, c'était toujours relaxant de parler avec toi.

Je remercie Rémy mozul et Stéphane popinet pour leurs aides techniques sur la simulation numérique. Merci pour votre efficacité.

Je remercie également les amis que j'ai rencontré à l'IJLRA, l'IUSTI ou autres laboratoires à Chateau Gombert. Lionel, merci pour ta bonne humeur, j'ai beaucoup apprécié ta prononciation Chinoise et notre sorties ensembles, merci Prof. Zhang, Wei, Zhanle, Dan, et Jun pour des discussions intéressantes. Merci à mes colocataires à Marseille : Anais, Lulu et Shuang pour des temps amusants. Merci à mes amis et camarades dispersés dans des coins du monde, pour tous les bons moments, merci Baiyang, Xiang, Yamei, Ying etc. qui sont toujours mes super copines.

Une grande pensée aussi, à tout ceux qu'ils m'ont apporté, mes parents, toute ma famille et ma belle famille.

Merci enfin, Yong pour tout, une des meilleures choses dans ma vie est de te rencontrer.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>État de l'art</b>	<b>15</b>
2.1	Écoulement des milieux granulaires denses . . . . .	15
2.1.1	Présentation phénoménologique de l'écoulement d'un milieu granulaire sec	16
2.1.2	Rhéologie des milieux granulaires secs . . . . .	17
2.2	Couplage fluide-grains . . . . .	19
2.2.1	Équations à deux phases . . . . .	20
2.2.2	Le tenseur des contraintes fluide $\sigma_{ij}^f$ . . . . .	21
2.2.3	La force d'interaction fluide-grain . . . . .	21
2.2.4	Le tenseur des contraintes granulaire $\sigma_{ij}^p$ . . . . .	23
2.3	Sur la vidange de silo . . . . .	24
2.3.1	Introduction . . . . .	24
2.3.2	Statique du silo : le modèle de Janssen . . . . .	25
2.3.3	Les régimes de vidange d'un silo . . . . .	26
2.3.4	Un débit indépendant de la hauteur de la colonne . . . . .	27
2.3.5	Loi d'échelle du débit de la vidange . . . . .	27
2.3.6	Effet de la taille des particules . . . . .	29
2.3.7	Effet de la polydispersité . . . . .	31
2.3.8	Effet de la position de l'orifice . . . . .	33
2.3.9	Effet d'un écoulement d'air . . . . .	34
2.4	Conclusion . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Système expérimental et outils numériques</b>	<b>37</b>
3.1	Système expérimental d'étude de la vidange d'un silo avec orifice latéral . . . . .	37
3.1.1	Choix du dispositif . . . . .	37
a.	Configurations du silo . . . . .	37
b.	Études préliminaires sur l'influence de la position verticale de l'orifice et de l'épaisseur de la paroi latérale. . . . .	38
c.	Milieu granulaire . . . . .	40

3.1.2	Procédure expérimentale . . . . .	40
3.1.3	Traitement des données et incertitudes des mesures . . . . .	41
	a. Fraction volumique initiale du silo . . . . .	41
	b. Débit massique des particules . . . . .	43
	c. Écoulement interne au silo . . . . .	44
3.2	Vidange du silo avec injection d'air . . . . .	47
3.2.1	Choix du dispositif . . . . .	47
	a. Configurations du silo . . . . .	47
	b. Système d'injection d'air . . . . .	48
3.2.2	Expérience à des débits d'air imposés . . . . .	49
3.2.3	Tests préliminaires, précision des mesures et calibration . . . . .	51
3.2.4	Traitement des données et des mesures . . . . .	52
	a. Fraction volumique . . . . .	53
	b. Débit massique des particules et débit volumique d'air . . . . .	53
	c. Pression le long du silo et mesure du gradient de pression d'air . . . . .	53
3.3	Simulations discrètes : LMGC90 . . . . .	56
3.3.1	Choix du modèle . . . . .	56
3.3.2	Description des systèmes étudiés . . . . .	57
	a. Condition périodique . . . . .	58
	b. Choix du pas de temps $\delta t$ . . . . .	59
	c. Choix du ratio $H/D$ et $L/D$ . . . . .	60
3.3.3	Mesures effectuées . . . . .	61
	a. Débit volumique des particules . . . . .	61
	b. Profil de fraction volumique sur l'orifice . . . . .	62
	c. Profil de la vitesse près de la sortie . . . . .	64
3.3.4	Conclusion . . . . .	65
3.4	Simulations continues : <i>Gerris</i> et <i>Basilisk</i> . . . . .	65
3.4.1	Choix du modèle . . . . .	65
3.4.2	Vidange de silo avec effet de la géométrie du silo . . . . .	66
	a. Équations résolues . . . . .	66
	b. Conditions aux limites . . . . .	67
	c. Mesures effectués . . . . .	69
3.4.3	Choix des paramètres . . . . .	70
	a. Nombre de mailles . . . . .	70
	b. Influence de la hauteur initiale du milieu granulaire . . . . .	71
	c. Influence de la largeur du silo . . . . .	71
3.4.4	Vidange de silo avec une injection d'air . . . . .	71
	a. Équations résolues . . . . .	71

b.	Conditions aux limites . . . . .	74
c.	Mesures effectués . . . . .	75
3.4.5	Conclusion . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Vidange d'un silo avec un orifice inférieur</b>	<b>77</b>
4.1	Résultats expérimentaux . . . . .	77
4.2	Simulation numérique continue . . . . .	79
4.3	Simulation numérique discrète . . . . .	80
4.3.1	Copie de l'article . . . . .	80
4.3.2	Complément à l'article : influence de la largeur du silo . . . . .	90
4.3.3	Complément à l'article : validité du modèle de Janda . . . . .	90
4.4	Conclusion et perspective . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Vidange d'un silo avec un orifice latéral</b>	<b>93</b>
5.1	Plan de l'article . . . . .	93
5.2	Copie de l'article . . . . .	93
5.2.1	Compléments à l'article . . . . .	120
5.3	Conclusion et perspective . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Effet d'un écoulement de gaz sur la vidange d'un silo avec orifice inférieur</b>	<b>125</b>
6.1	Résultats expérimentaux . . . . .	125
6.1.1	Débit de vidange des particules . . . . .	125
a.	Influence du débit d'air et du diamètre de l'orifice . . . . .	126
b.	Influence de la taille du silo et de la taille des particules . . . . .	127
6.1.2	Écoulement d'air . . . . .	128
a.	Évolution spatiale et temporelle de la pression . . . . .	129
6.2	Modélisation diphasique . . . . .	132
6.2.1	Simplification des équations dans le système expérimental . . . . .	132
6.2.2	Évaluation de la force de traînée à partir des mesures de pression . . . . .	133
a.	Loin de l'orifice . . . . .	133
b.	Mesures de pression proche de l'orifice . . . . .	136
6.2.3	Modèles asymptotiques . . . . .	139
a.	Régime très peu perméable . . . . .	139
b.	Régime très perméable . . . . .	140
6.2.4	Modélisation de la vidange d'un silo soumis à un écoulement de gaz . . . . .	142
a.	Débit de particules en fonction de la traînée . . . . .	142
b.	Un modèle analytique simple . . . . .	143
6.3	Simulation numérique continue . . . . .	147
6.3.1	Résultats numériques . . . . .	148

6.3.2	Comparaison avec le modèle analytique simple . . . . .	148
6.4	Conclusions et perspectives . . . . .	151
<b>7</b>	<b>Effet d'un écoulement de gaz sur la vidange d'un silo avec orifice latéral</b>	<b>153</b>
7.1	Débit de vidange des particules . . . . .	153
7.2	Écoulement d'air . . . . .	155
7.3	Modèle . . . . .	158
7.3.1	Modèles asymptotiques . . . . .	158
7.3.2	Relation entre le débit de particules et le gradient de pression fluide à l'orifice	159
7.3.3	Modèle analytique simple . . . . .	161
7.3.4	Prédiction du débit de particules lors d'une injection d'air dans un silo avec un orifice latéral . . . . .	162
7.4	Simulation numérique continue . . . . .	163
7.4.1	Résultats numériques . . . . .	164
7.4.2	Comparaison avec le modèle analytique simple . . . . .	165
7.5	Conclusions et perspectives . . . . .	166
<b>8</b>	<b>Analyse de la simulation d'une rhéologie viscoplastique</b>	<b>169</b>
8.1	Analyse du cas de l'orifice inférieur . . . . .	169
8.1.1	Les champs eulériens . . . . .	169
8.1.2	Le bilan de quantité de mouvement . . . . .	172
8.1.3	Pression granulaire et frottements . . . . .	175
8.1.4	Zone morte . . . . .	178
8.1.5	Influence des paramètres rhéologiques . . . . .	179
8.1.6	Conclusions . . . . .	180
8.2	Analyse du cas avec le trou sur le côté . . . . .	180
8.2.1	Les champs . . . . .	180
8.2.2	Pression et frottement granulaire et pariétal . . . . .	180
8.2.3	Vitesse et énergie cinétique . . . . .	183
8.2.4	Conclusions . . . . .	184
8.3	Conclusions . . . . .	184
<b>9</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>187</b>
<b>A</b>	<b>Validation des simplifications des équations à deux phases</b>	<b>193</b>
A.1	Accélération du fluide . . . . .	193
A.2	Contrainte visqueuse . . . . .	194
	<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Dans les réacteurs nucléaires à eau sous pression (REP), le combustible, la matière fissile, est un oxyde polycristallin (d'uranium ou mixte d'uranium et de plutonium, de masse volumique de l'ordre de  $10^4 \text{kgm}^{-3}$ ) conditionné sous forme de pastilles cylindriques de diamètre et de hauteur de l'ordre du centimètre comme schématisé sur la figure 1.1a, le grain élémentaire étant de l'ordre de quelques micromètres. Ces pastilles sont empilées dans une gaine métallique d'épaisseur de l'ordre de  $500 \mu\text{m}$  destinée à confiner les produits de fission. L'ensemble, appelé crayon combustible, a une longueur d'environ  $4\text{m}$ . Dans le réacteur les crayons sont assemblés les uns à côté des autres autour de grappes de commande, comme on peut le voir sur la figure 1.1b, et immergés dans l'eau pressurisé à  $15.5\text{MPa}$  du cœur du réacteur.

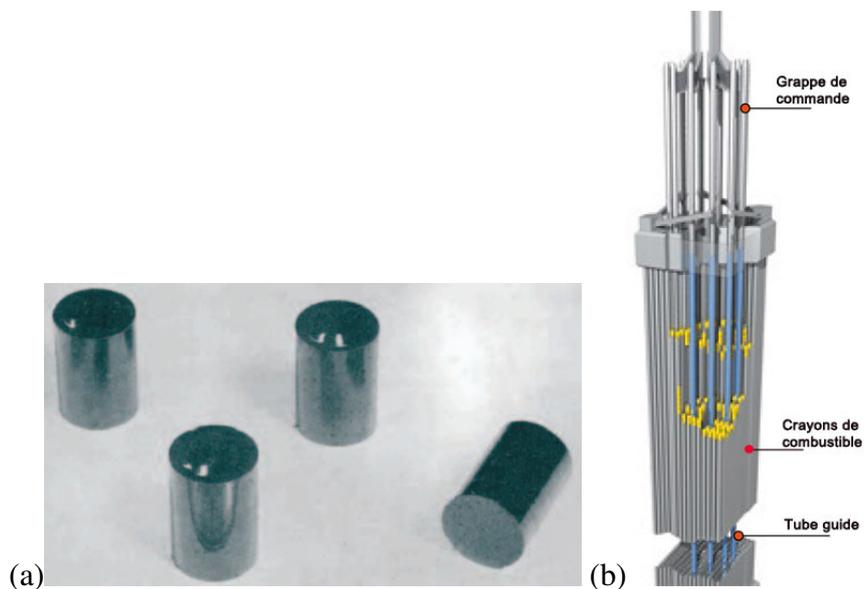


FIGURE 1.1 – (a) Pastilles combustibles à l'état "vierge". (b) Schéma d'un assemblage de combustible.

Sous l'action du temps et notamment des réactions de fission au sein du réacteur, les pastilles se fragmentent et gonflent. En effet, elles sont soumises à des gradients thermiques et mécaniques,

l'irradiation (flux neutronique) et les réactions de fission (formation de nouveaux composés solides au sein de la matrice et relâchement des produits de fission gazeux), voir la figure 1.2. La taille des fragments (les plus importants étant de l'ordre de quelques  $mm$ ) dépend de la nature du combustible et du taux de combustion qui mesure l'énergie massique fournie par le matériau. Dans la couronne la plus extérieure du combustible, pour des taux de combustion élevés, la taille des grains constituant le matériau est réduite (inférieure au  $\mu m$ ) et celle des fragments aussi.

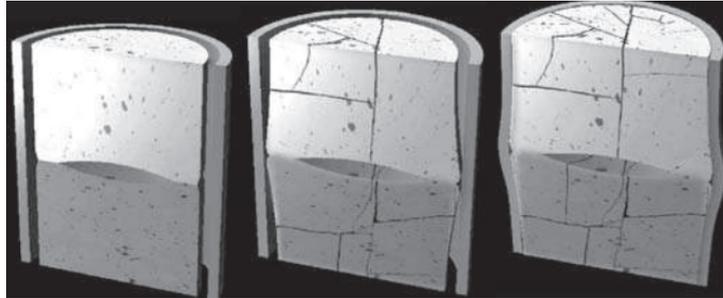


FIGURE 1.2 – Schématisation de la fracturation des pastilles, de leur déformation - en forme dite de diabolo - et de l'évolution du jeu entre les pastilles et la gaine au cours de l'irradiation.

L'accident d'insertion de réactivité (RIA) est l'un des scénarios considérés dans les études de sûreté des centrales de type REP. Le scénario considéré est alors initié par l'éjection inopinée d'une grappe de commande qui sert à réguler la réaction de fission. Cette éjection violente entraîne un pic de puissance nucléaire pendant quelques dizaines de milli-secondes provoquant une augmentation rapide de la température du combustible. Les niveaux de température et de déformation de la gaine du crayon s'élèvent entraînant, à terme, un risque de rupture de cette gaine (dû à la dilatation et au gonflement du combustible). La figure 1.3 schématise la séquence d'événements pouvant se produire si cette rupture survient : des fragments de combustible et du gaz à très haute température (de l'ordre de  $2000K$ ) sont éjectés vers le réfrigérant (environ  $330K$ ) et un transfert thermique violent se produit entre les particules de combustibles et l'eau. L'augmentation brusque d'énergie de l'eau se traduit par un pic de pression suivi d'une vaporisation rapide de ce fluide. Ces phénomènes, si ils sont particulièrement intenses, pourraient induire d'autres endommagements.

Le débit d'éjection des fragments de combustible joue un rôle important sur l'intensité des interactions car il pilote la cinétique des transferts d'énergie entre le combustible et l'eau. Ce débit dépend nécessairement de la taille de la brèche (qui détermine la section de passage des fragments), de la pression des gaz de fission au sein du crayon (de l'ordre de plusieurs dizaines à plusieurs centaines de bar au dessus de la pression du cœur, l'écoulement en résultant pouvant entraîner des fragments) et de la taille des fragments (qui détermine leur aptitude à passer la brèche). Cependant la compréhension de la dynamique de cette éjection reste limitée, l'observation directe du phénomène étant inenvisageable (Ruyer [2012]).

Le scénario de RIA est étudié à l'aide d'essais dédiés pour lesquels un tronçon de crayon de combustible est soumis à un pic de puissance. Quelques données suite à de tels essais sont

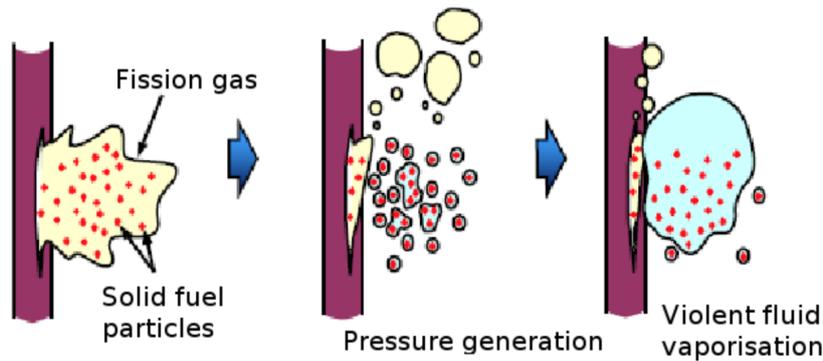


FIGURE 1.3 – Schématisation de la séquence de phénomènes couplés lors d'un accident d'insertion de réactivité (RIA).

disponibles (Ishikawa et Shiozawa [1980], Fuketa *et coll.* [1997]). Dans un essai RIA où le crayon combustible présente une brèche latérale de l'ordre de  $10\text{cm}$  (voir la figure 1.4(a)), Fuketa *et coll.* [1997] ont montré que les particules de combustibles collectées sont fortement fragmentées : 90% (en masse) de particules sont inférieures à  $500\mu\text{m}$ , et plus de 50% (en masse) de particules sont inférieures à  $50\mu\text{m}$ . Une photographie d'un échantillon de particules de combustible observé au microscope est montré sur la figure 1.4(b).

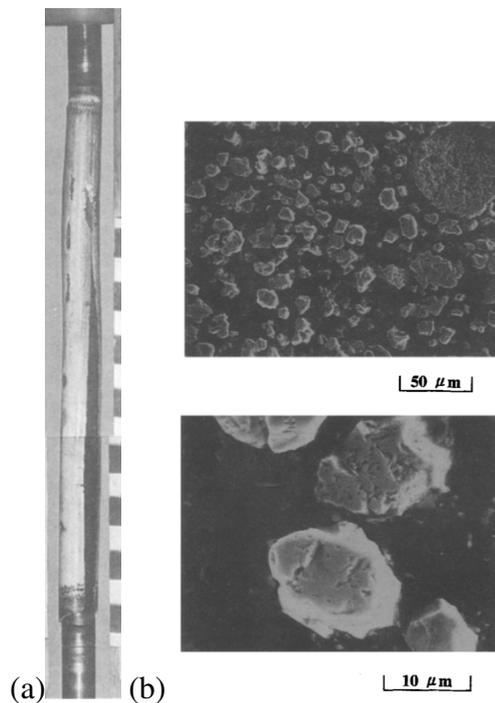


FIGURE 1.4 – Photographies réalisées après un essai RIA d'après Fuketa *et coll.* [1997]) : (a) Une partie du crayon combustible avec une brèche latérale d'ordre  $10\text{cm}$  (b) un échantillon de particules de combustible observé au microscope.

La rupture de la gaine d'un crayon de combustible est aussi envisagée dans le scénario d'accident dit de perte de réfrigérant primaire. Dans ce contexte, la pression du cœur chute brutalement

tandis que le crayon reste chaud et devient alors relativement pressurisé. La déformation induite de la gaine peut entraîner sa rupture. On cherche alors à évaluer les déplacements de combustible au sein du crayon et la quantité de combustible qui pourrait être disséminée dans le cœur.

On voit donc que la connaissance de l'écoulement d'un milieu fragmenté confiné dans un réservoir cylindrique élancé, ouvert sur son flanc, et ce sous la double action de la gravité et d'un écoulement gazeux, a un intérêt particulier pour l'étude des ces scénarios accidentels. Dans le cas plus précis du RIA, on cherche ainsi à connaître plus précisément la vitesse de l'écoulement des fragments hors du crayon de combustible.

Le matériau nucléaire fragmenté est complexe à caractériser et à représenter, mais il s'idéalise comme un milieu granulaire dense, c'est à dire dans lequel les contacts entre grains sont déterminant pour son comportement (on verra au chapitre suivant une définition plus rigoureuse de ce type de milieu). Dans cette étude, ce milieu sera idéalisé par une assemblée de billes de verre. La forme sphérique minimise naturellement le contact entre grains et on suppose donc ici que le débit du milieu modèle sera nécessairement plus important que celui du milieu réel, toutes choses étant égales par ailleurs. Le combustible fragmenté a une distribution en taille de particules relativement large. Dans cette étude, on se bornera à l'étude de milieux monodisperses en taille. Le fait d'utiliser de tels matériaux modèles est principalement dicté par la nécessité que nous aurons d'identifier clairement le rôle de chacun des paramètres sur le débit et le peu de connaissances dont nous disposons a priori pour identifier les paramètres qui le déterminent.

La situation académique la plus pertinente, que nous considérons comme analogue de la configuration d'intérêt, est celle de la vidange d'un silo contenant un milieu granulaire. Dans ce cas, la vidange, dont le moteur principal est la gravité, est une grandeur étudiée depuis longtemps. L'assistance de la vidange par un débit gazeux ainsi que l'influence de l'ouverture par laquelle le milieu s'écoule a fait l'objet de plusieurs études. Néanmoins, on le verra plus en détail dans le chapitre suivant, de nombreuses questions demeurent, notamment sur le mécanisme physique déterminant le débit de vidange. Le réservoir contenant le combustible fragmenté a une géométrie particulière qui diffère d'un silo : il est très élancé et ouvert sur son flanc, deux spécificités qui la font s'écarter fortement d'un silo plus classique :

- le périmètre frottant du réservoir est du même ordre de grandeur que la taille de la brèche
- l'ouverture est orientée perpendiculairement à la gravité

Une partie de notre étude s'attachera donc à déterminer si les résultats connus pour la vidange de silo peuvent s'appliquer à la configuration d'intérêt. Ainsi, on considèrera avec attention l'influence des parois du réservoir et de l'orientation de l'ouverture, des paramètres qui ne sont pas usuels dans l'étude de la vidange d'un silo.

Enfin, on négligera l'influence potentielle du milieu dans lequel la sortie s'effectue (à savoir pour le contexte d'un RIA, de l'eau pressurisée).

Afin de modéliser la dynamique de l'éjection de gaz et de grains suite à la rupture d'un crayon

de combustible nucléaire nous avons ainsi choisi d'étudier une configuration simplifiée à l'échelle du laboratoire. L'objectif de cette thèse est ainsi d'étudier la vidange d'un silo avec un orifice latéral, simulant la brèche, en présence d'un écoulement d'air, simulant les gaz de fission. Nous utilisons un milieu granulaire monodisperse constitué de billes sphériques et nous considérons une sortie libre dans l'air, le tout étant isotherme.

De manière générale, on cherche dans cette étude à déterminer les paramètres qui gouvernent le débit du matériau granulaire et ce principalement par le biais d'études expérimentales. Certains comportements des milieux granulaires, comme la vidange d'un silo, sont encore décrits par des lois empiriques, aucun modèle n'ayant permis de les établir à partir de relations plus fondamentales. Ceci réduit nécessairement la possibilité d'extrapoler le comportement observé à des configurations différentes. La simulation numérique des milieux granulaires connaît un développement important ces dernières décennies. Des méthodes numériques permettent de simuler la dynamique d'une population discrète de particules suivies individuellement et dont la forme et les contacts sont représentés explicitement. Ces méthodes sont encore coûteuses mais permettent une étude approfondie des mécanismes locaux, et nous les appliquerons notamment pour vérifier certaines conjectures de notre étude. Elles ne se prêtent pas a priori à l'étude quantitative de la dynamique de milieux réels de grande dimension pour lesquels il serait plus pertinent de modéliser la dynamique avec un nombre réduit de paramètres. C'est l'ambition de la modélisation de l'écoulement d'un matériau granulaire par des approches continues. À l'instar des outils dits de CFD, utilisés pour la simulation numérique des fluides newtoniens notamment, il s'agit de décrire de manière eulérienne l'écoulement. Ceci suppose de connaître les relations fondamentales entre contrainte et cisaillement au sein du matériau, soit sa loi de comportement rhéologique. Dans cette étude, nous analyserons en particulier la capacité des modèles rhéologiques de la littérature à reproduire les phénoménologies que nous constaterons expérimentalement.

Dans le chapitre 2, nous proposons une présentation de l'état des connaissances concernant l'écoulement des milieux granulaires denses et le couplage avec un écoulement fluide, et nous détaillerons plus particulièrement le cas de la vidange des silos. Pour mener cette étude, nous avons utilisé des expériences de laboratoire, des simulations numériques discrètes et des simulations numériques continues, outils que nous décrivons au chapitre 3. La vidange de silo avec un orifice placé au fond du silo et en l'absence d'écoulement fluide, nous servira de référence ; nous l'avons étudiée et la présentons succinctement au chapitre 4. Nous avons ensuite considéré l'influence des paramètres de manière séparée : dans le chapitre 5 nous nous intéressons d'abord à l'effet sur le débit de la position de l'orifice de vidange, en bas (comme dans un réservoir classique) ou sur le côté. Puis dans le chapitre 6 nous revenons à la configuration du silo avec l'orifice en bas et nous étudions l'effet d'un écoulement d'air sur la vidange. Enfin dans le chapitre 7 nous étudions la configuration d'intérêt : la vidange d'un silo avec un orifice latéral en présence d'un écoulement de gaz. En perspective dans le chapitre 8 nous discutons de la pertinence et de la suffisance d'une modélisation continue pour représenter l'écoulement granulaire au sein des réservoirs étudiés.



# Chapitre 2

## État de l'art

Dans ce chapitre nous proposons une description de l'état des connaissances concernant l'écoulement des milieux granulaires denses et la vidange des silos.

### 2.1 Écoulement des milieux granulaires denses

Selon la formulation proposée par [Andréotti \*et coll.\* \[2011\]](#), un milieu granulaire est une collection de particules solides macroscopiques, typiquement de taille supérieure à  $100\mu m$ . Cette limite basse de la taille correspond à négliger les forces cohésives, l'effet d'humidité et l'agitation thermique devant les forces de contact et la pesanteur. Ces matériaux en grains sont non seulement très présents dans la vie quotidienne mais aussi dans les activités industrielles, par exemple les granulats des mines et de la construction ou les semences de l'agriculture. Ils sont aussi constitutifs pour partie des sols et à ce titre très importants dans les processus géophysiques, comme les glissements de terrain et l'érosion. On fait l'hypothèse que les fragments de combustible sont un tel milieu, même si la taille des particules peut atteindre la dizaine de  $\mu m$ . On considère aussi l'interaction entre le fluide interstitiel et les particules. De nombreuses situations concernent des milieux granulaires immergés dans un fluide, notamment un liquide. C'est le cas par exemple de l'écoulement du béton. Du point de vue géophysique, le couplage entre un sol granulaire et de l'eau joue un rôle prépondérant dans les catastrophes naturelles telles que les glissements de terrains ou les coulées de boues.

Depuis une dizaine d'années, de nombreuses études s'intéressant à la rhéologie d'un milieu granulaire sec ou immergé ont été effectuées, et ont permis d'établir les lois constitutives qui décrivent ces écoulements dans des nombreux cas ([Andréotti \*et coll.\* \[2011\]](#)). Nous allons présenter brièvement les éléments dont nous avons besoin dans le cadre de cette thèse. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Andréotti \*et coll.\* \[2011\]](#) pour plus de détails.

## 2.1.1 Présentation phénoménologique de l'écoulement d'un milieu granulaire sec

L'étude des écoulements d'un milieu granulaire conduit à distinguer trois régimes de comportement différents (Jaeger *et coll.* [1996]) selon le mode de sollicitation, comme on peut le voir sur la figure 2.1a qui correspond à une photo prise avec un long temps de pose d'une ensemble de billes sur un plan incliné. On distingue 3 couches, les billes de la couche inférieure restent immobiles alors que des contraintes des cisaillement sont présentes. Au sein de cette couche, le milieu se comporte donc comme un solide. Dans ce régime, le système est dominé par les interactions de contact entre les grains. À l'autre extrême sur la couche du dessus, les grains sont très agités et interagissent par collisions binaires. Dans ce régime le milieu ressemble à un gaz. Enfin entre les deux, le milieu granulaire coule formant un fluide granulaire dense, où les particules interagissent à la fois par des collisions et des contacts frictionnels multiples de longue durée. La plupart des écoulements granulaires observés dans la nature et dans l'industrie appartiennent à ce régime intermédiaire. C'est notamment le cas de la vidange du silo qui est l'analogie de notre configuration d'intérêt. Nous nous focaliserons donc par la suite sur ce régime d'écoulement dense.

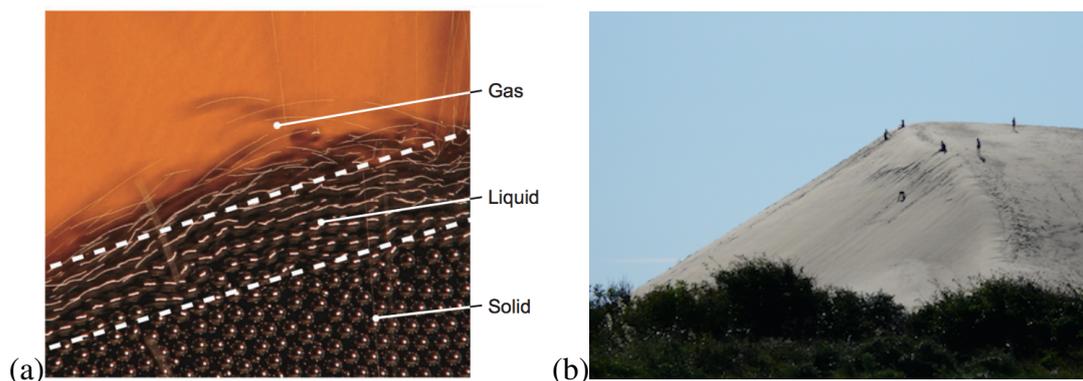


FIGURE 2.1 – (a) Les milieux granulaires se comportent comme un solide, un liquide ou un gaz selon le mode de sollicitation. Extrait de (Forterre et Pouliquen [2008]) (b) Dune de Rabjerg Mile au Danemark.

Puisque la dynamique des contacts entre grains joue un rôle prépondérant dans l'écoulement d'un milieu granulaire sec, il est suffisant de décrire le milieu en considérant explicitement le mouvement individuel de chaque grain ainsi que la géométrie de sa surface pour prendre en compte les contacts. Les méthodes de simulation numérique des milieux granulaires dites discrètes mettent en œuvre ce principe, p.-ex. Radjai et Dubois [2011]. Elles permettent, grâce aux développements récents de la puissance de calcul des ordinateurs, de décrire des systèmes comprenant un nombre élevé de particules. La description de l'ensemble de ces états du milieu granulaire n'est cependant pas toujours nécessaire pour modéliser son écoulement.

D'un point de vue macroscopique, ces écoulements granulaires denses ont deux caractéristiques importantes. D'une part, le milieu se comporte comme un fluide à seuil : il faut que le milieu gra-

nulaire soit soumis à une certaine contrainte pour qu'il puisse couler. Ceci se traduit par le fait qu'un empilement statique d'un milieu granulaire n'a pas une surface horizontale, ce qui s'observe communément par la formation de tas comme illustré sur la figure 2.1b. Il existe un angle critique pour la surface d'un tel empilement avec l'horizontale,  $\theta_c$  à partir duquel les particules se mettent à couler. Par analogie avec un pavé frottant sur un plan incliné on peut alors définir un coefficient de friction effectif du matériau  $\mu_s = \tan(\theta_c)$ . Ce coefficient est le paramètre macroscopique représentant à la fois le coefficient de friction entre les grains et la géométrie des contacts. D'autre part, l'écoulement de ce matériau dépend de la contrainte normale appliquée : ce sont des matériaux frottants. Néanmoins, son déplacement ne peut pas être décrit par une simple loi de Coulomb car les contraintes dépendent du cisaillement comme pour les fluides visqueux.

La section suivante présente succinctement l'état des connaissances sur la modélisation de ce comportement rhéologique des milieux granulaires secs.

### 2.1.2 Rhéologie des milieux granulaires secs

Une configuration simple pour étudier la rhéologie des milieux granulaires secs est celle d'une cellule de cisaillement bidimensionnelle comme schématisée sur la figure 2.2, où on applique un taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  à des grains de diamètre  $d$  et de masse volumique  $\rho_p$ , confinés par une pression  $p^p$ .

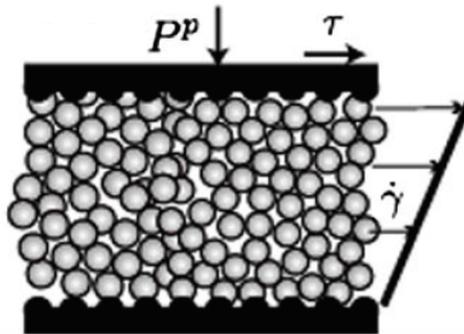


FIGURE 2.2 – Cisaillement plan bidimensionnel. Extrait de [Boyer \*et coll.\* \[2011\]](#).

En se basant sur des arguments dimensionnels on peut montrer qu'il suffit d'un seul nombre sans dimension pour décrire le comportement du système ([da Cruz \*et coll.\* \[2005\]](#), [MIDI \[2004\]](#)). Ce nombre, noté  $I$  et appelé nombre inertiel, est donné par

$$I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{p^p/\rho_p}}, \quad (2.1)$$

Il peut être interprété comme le rapport entre deux temps caractéristiques :

- Un temps microscopique de réarrangement,  $t_{micro} = d/\sqrt{p^p/\rho_p}$ , qui représente le temps de chute d'une particule dans le puits entre ses voisins sous l'effet de la pression de confinement

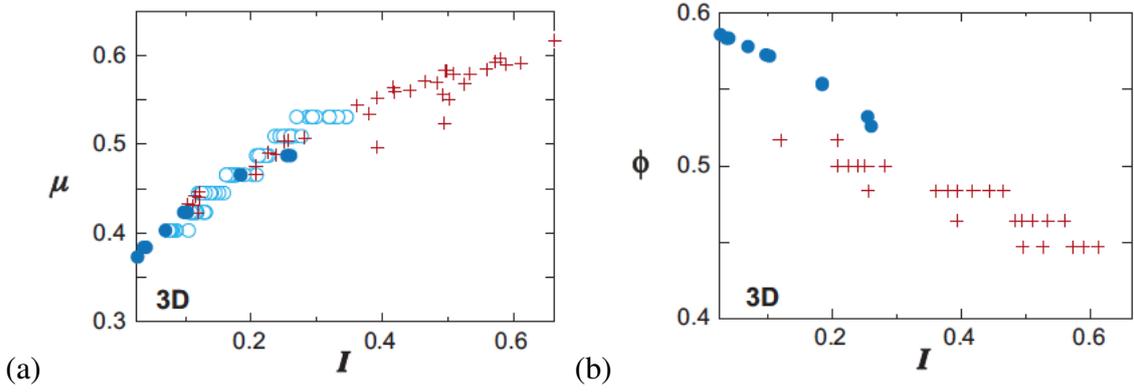


FIGURE 2.3 – (a) coefficient de friction  $\mu$  et (b) fraction volumique  $\phi$  en fonction du nombre inertiel dans trois configurations : expériences sur plan incliné ( $\circ$ ), simulations sur plan incliné ( $\bullet$ ), et expériences de cisaillement plan ( $+$ ). Extrait de [Forterre et Pouliquen \[2008\]](#).

$p^p$ .

- Un temps macroscopique de déformation,  $t_{macro} = 1/\dot{\gamma}$ , qui correspond au temps que met une particule à franchir la particule voisine sous l'effet du cisaillement.

Le régime d'écoulement dense correspond à la gamme  $10^{-3} \lesssim I \lesssim 0.1$ . L'analyse dimensionnelle impose une relation de type "loi de friction" entre la contrainte tangentielle  $\tau^p$  et la contrainte normale  $p^p$ , avec un coefficient de friction effectif  $\mu$  qui dépend de ce nombre sans dimension  $I$ . On a donc :

$$\tau^p = \mu(I)p^p \quad (2.2)$$

Sur la figure 2.3a, le coefficient de friction effectif  $\mu = \tau^p/p^p$  est tracé en fonction de  $I$  pour des expériences et des simulations numériques dans plusieurs configurations. Les points se superposent sur la même courbe, ce qui suggère qu'il existe une rhéologie locale unique, intrinsèque au matériau ([MIDI \[2004\]](#)). La figure 2.3b montre la fraction volumique  $\phi$  en fonction de  $I$ . On peut voir que le milieu granulaire tend à se dilater quand il est cisailé et que  $\phi$  dépend uniquement de  $I$  :

$$\phi = \phi(I) \quad (2.3)$$

Les auteurs d'une série d'articles ([Pouliquen et Forterre \[2002\]](#), [Forterre et Pouliquen \[2003\]](#), [Jop et coll. \[2005\]](#)) ont proposé une relation empirique relativement simple de la loi de friction  $\mu(I)$  et de la fraction volumique  $\phi(I)$  :

$$\mu(I) = \mu_s + \frac{(\mu_2 - \mu_s)}{I_0/I + 1} \quad (2.4)$$

$$\phi = \phi_{max} + (\phi_{max} - \phi_{min})I \quad (2.5)$$

Les paramètres  $\mu_s$ ,  $\mu_2$ ,  $I_0$ ,  $\phi_{min}$  et  $\phi_{max}$  dépendent du matériau utilisé. Typiquement pour des billes de verres monodisperses, on a  $\mu_s = 0.4$ ,  $\mu_2 = 0.65$ ,  $I_0 = 0.3$ ,  $\phi_{min} = 0.4$  et  $\phi_{max} = 0.64$ .

Pour décrire des écoulements tridimensionnels, une généralisation tensorielle à trois dimensions de la loi  $\mu(I)$  a été proposée par [Jop et coll. \[2006\]](#). La contrainte granulaire est décomposée en un terme de pression isotrope et un terme déviatorique :

$$\sigma_{ij}^p = -p^p \delta_{ij} + \tau_{ij}^p, \quad (2.6)$$

Le terme déviatorique s'écrit comme suit :

$$\tau_{ij}^p = \eta_{eff} \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \eta_{eff} = \frac{\mu(I)p^p}{|\dot{\gamma}|} \quad (2.7)$$

où  $\dot{\gamma}_{ij} = (\partial u_i^p / \partial x_j + \partial u_j^p / \partial x_i)$  est le tenseur taux de déformation et  $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$  le second invariant du tenseur taux de déformation. Cette approche en terme de rhéologie visco-plastique locale couplée à la loi de friction (équation 2.4) a prédit avec succès de nombreuses configurations d'écoulements granulaires complexes. Par exemple, elle a été utilisée pour décrire des écoulements granulaires sur un fond meuble ([Jop et coll. \[2006\]](#), [Chauchat et Médale \[2014\]](#)), l'apparition d'ondes de surfaces dans un écoulement sur plan incliné ([Forterre \[2006\]](#)), l'effondrement d'une colonne de grains sur un plan horizontal ([Lacaze et Kerswell \[2009\]](#), [Lagrée et coll. \[2011\]](#)) ainsi que la vidange de silo ([Staron et coll. \[2012, 2014\]](#)). On note aussi que [Jop et coll. \[2005\]](#) ont décrit avec succès l'écoulement d'un milieu granulaire influencé par des parois solides en combinant cette rhéologie à une description des contraintes décrivant le frottement pariétal. Cependant, il existe plusieurs limites à cette approche locale. Par exemple dans la limite quasi-statique les propriétés de démarrage et d'arrêt des écoulements sont mal décrites, de même que l'existence de corrélations spatiales qui introduisent une non-localité. De nombreux modèles tentent aujourd'hui d'introduire ces ingrédients ([Bouزيد et coll. \[2013\]](#), [Kamrin \[2010\]](#), [Pouliquen et Forterre \[2009\]](#)). La transition vers le régime gazeux est également mal capturée. Enfin cette rhéologie  $\mu(I)$  est mal posée mathématiquement pour les faibles et les grandes valeurs de  $I$  ce qui peut générer des problèmes lors de la résolution numérique ([Barker et coll. \[2015\]](#)).

Malgré ces limites, les précédents succès de l'utilisation de la rhéologie  $\mu(I)$  dans l'étude de la vidange de silo ([Staron et coll. \[2012, 2014\]](#)) et pour la prise en compte du couplage avec le frottement pariétal ([Jop et coll. \[2005\]](#)) nous incite à tester la validité de cette modélisation continue pour notre étude de la vidange d'un réservoir élançé avec un orifice latéral.

## 2.2 Couplage fluide-grains

Lorsque le frottement entre le fluide interstitiel et les particules est suffisant pour compenser les forces de contact et/ou la pesanteur, il devient nécessaire de décrire le couplage entre les

écoulements des milieux fluide et granulaire. c'est particulièrement le cas pour les milieux granulaires immergés dans un liquide au repos (forte masse volumique induisant une poussée d'Archimède et forte viscosité) ou dans un gaz à haute vitesse (forte traînée, à l'instar des lits fluidisés).

À l'instar des méthodes discrètes pour le granulaire sec, il est suffisant pour décrire ce couplage de résoudre l'écoulement fluide interstitiel. Pour des fluides newtoniens, on peut alors avoir recours aux nombreuses techniques de résolution des équations de Navier-Stokes. De telles méthodes numériques, couplées à la résolution de la dynamique des contacts, permettent alors de décrire l'écoulement des deux milieux, p.-ex. [Amarsid \[2015\]](#). Mais il est encore nécessaire de poursuivre l'efficacité des méthodes de résolution pour permettre la simulation de milieux réalistes en trois dimensions.

Plusieurs études récentes concernant des écoulements de milieux granulaires immergés dans un fluide ont montré que ces écoulements pouvaient être décrits dans le cadre d'une modélisation continue à deux phases en utilisant une rhéologie frictionnelle pour la phase granulaire. Ces études traitent par exemple des avalanches sous marines ([Bouchut et coll. \[2016\]](#), [Cassar et coll. \[2005\]](#), [Pailha et Pouliquen \[2009\]](#)), des lâchers de barrage sous marins ([Rondon \[2011\]](#)), des suspensions denses ([Boyer et coll. \[2011\]](#)) ou de l'érosion d'un lit de particules ([Aussillous et coll. \[2013\]](#), [Chauchat et Médale \[2010\]](#), [Ouriemi et coll. \[2009\]](#), [Revil-Baudard et Chauchat \[2013\]](#)). Les modèles continus à deux phases sont également largement utilisés dans la descriptions des écoulements de lits fluidisés<sup>1</sup> ou des suspensions pour lesquels le comportement rhéologique du milieu granulaire s'écarte du régime dense (régime dilué). Dans cette partie, nous allons présenter le formalisme des équations à deux phases ainsi que les relations de fermetures proposées par différents auteurs.

### 2.2.1 Équations à deux phases

Les équation à deux phases sont obtenues en effectuant une moyenne d'espace des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement écrites localement pour la phase fluide et la phase solide sur un volume élémentaire grand par rapport à l'échelle des particules et petit par rapport à l'échelle de l'écoulement macroscopique (voir par exemple [Jackson \[2000\]](#)). Si l'on considère un milieu granulaire composé de particules de diamètre  $d$  et de densité  $\rho_p$ , immergée dans un fluide de densité  $\rho_f$  et de viscosité  $\eta$  et si l'on suppose que le fluide et les particules sont incompressibles, les équations de bilan moyennées pour les deux phases s'écrivent :

---

1. Ce type d'écoulement est utilisé dans des réacteurs gaz-particules. Le principe est d'injecter le gaz selon un écoulement fluide vertical ascendant. Ainsi, la traînée s'opposant à la gravité et lorsque le débit de fluide est suffisant, le milieu est mis en suspension ce qui assure un bon mélange.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\epsilon u_i^f)}{\partial x_i} = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u_i^p)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.9)$$

$$\rho_f \frac{D_f(\epsilon u_i^f)}{Dt} = \rho_f \epsilon \left[ \frac{\partial u_i^f}{\partial t} + u_j^f \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} - f_i + \epsilon \rho_f g_i, \quad (2.10)$$

$$\rho_p \frac{D_p(\phi u_i^p)}{Dt} = \rho_p \phi \left[ \frac{\partial u_i^p}{\partial t} + u_j^p \frac{\partial u_i^p}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^p}{\partial x_j} + f_i + \phi \rho_p g_i, \quad (2.11)$$

où l'on a noté  $\phi$  la fraction volumique de l'empilement granulaire et  $\epsilon = 1 - \phi$  la porosité. Les vitesses locales des particules et du fluide sont respectivement  $u_i^p$  et  $u_i^f$ . Les tenseurs  $\sigma_{ij}^p$  et  $\sigma_{ij}^f$  sont respectivement les tenseurs des contraintes de la phase particule et de la phase fluide et  $f_i$  correspond à la force moyenne résultante exercée par le fluide sur les particules. En principe, ces équations permettent de décrire le comportement du mélange grain-fluide. Néanmoins, la difficulté réside dans le choix de  $\sigma_{ij}^f$ ,  $\sigma_{ij}^p$  et  $f_i$ , que nous allons discuter par la suite.

### 2.2.2 Le tenseur des contraintes fluide $\sigma_{ij}^f$

On décompose le tenseur des contraintes associé à la phase fluide  $\sigma_{ij}^f$  en un terme de pression isotrope et un terme déviatorique, lié à la viscosité :

$$\sigma_{ij}^f = -p^f \delta_{ij} + \tau_{ij}^f$$

[Aussillous et coll. \[2013\]](#), [Jackson \[2000\]](#), [Ouriemi et coll. \[2009\]](#) utilisent une formulation newtonienne reliée à la vitesse débitante,  $U_i = \epsilon u_i^f + \phi u_i^p$ , pour décrire la rhéologie de la phase fluide :

$$\tau_{ij}^f = \eta_e \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

où  $\eta_e$  est une viscosité effective. Néanmoins ce terme est négligeable par rapport à la force résultant des interactions fluide-grains dans la plupart des configurations ([Cassar et coll. \[2005\]](#), [Pailha et Pouliquen \[2009\]](#), [Pitman et Le \[2005\]](#)) et on peut ainsi considérer que

$$\sigma_{ij}^f \simeq -p^f \delta_{ij}$$

### 2.2.3 La force d'interaction fluide-grain

La force d'interaction  $f$  entre les phases fluide et solide peut être séparée en une force de flottabilité et une force de traînée  $f_t$  liée à la vitesse relative entre les deux phases ([Jackson \[2000\]](#),

Andréotti *et coll.* [2011], Simonin *et coll.* [2016]) :

$$f_i = \phi \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} + f_{ti}, \quad (2.12)$$

Plusieurs relations empiriques existent pour décrire la force de traînée  $f_{ti}$ . Cette force joue un rôle prépondérant dans les écoulements de fluide dans les milieux poreux ou dans les lits fluidisés. Pour décrire le frottement d'un fluide s'écoulant dans les interstices d'un milieu solide, on peut considérer l'analogie avec les écoulements dans les milieux poreux pour lesquels une loi largement utilisée est celle de Darcy (Nield et Bejan [2006]) :

$$f_{ti} = \beta_l \eta (1 - \phi)^2 (u_i^f - u_i^p) \quad (2.13)$$

où  $\beta_l$  est l'inverse de la perméabilité du milieu poreux. Notons que pour un milieu poreux composé d'un empilement de sphères, une expression empirique de  $\beta_l$  peut être donnée par la formule de Kozeny-Carman :

$$\beta_l = \frac{150\phi^2}{(1 - \phi)^3 d^2} \quad (2.14)$$

Cette loi est souvent utilisée pour calculer la force de traînée dans le cas d'un milieu granulaire immergé dans un liquide, Ouriemi *et coll.* [2009], Pailha et Pouliquen [2009], Pitman et Le [2005], Rondon [2011].

La loi de Darcy n'est valable que pour des écoulements dans le régime visqueux autour des particules, c'est à dire pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds particulaire de l'écoulement  $Re_p = \rho_f (u^f - u^p) d / \eta$ , soit  $Re_p < 1$  ou 15 selon l'expérience (Hassanizadeh et Gray [1987]). Pour des grands  $Re_p$ , il est nécessaire de considérer l'aspect inertiel de l'écoulement fluide autour de la particule pour estimer le frottement. La relation la plus utilisée, notamment pour les lits fluidisés (Daloz-Dubrujeaud *et coll.* [2000], Peirano *et coll.* [2002]), est celle proposée par Ergun [1952] :

$$f_{ti} = \beta_l \eta (1 - \phi)^2 (u_i^f - u_i^p) + \beta_i \rho_f d (1 - \phi)^2 (u_i^f - u_i^p)^2 \quad (2.15)$$

avec  $\beta_l = \frac{150\phi^2}{(1 - \phi)^3 d^2}$  et  $\beta_i = 1.75 \frac{\phi}{(1 - \phi)^3 d^2}$ . Nous pouvons voir que le premier terme de cette expression correspond à celui de Darcy (équation 2.13).

Dans notre configuration d'intérêt, l'écoulement gazeux correspond à de faibles valeurs de la viscosité  $\eta_f$  et de la masse volumique du fluide. Par contre, le débit gazeux, et potentiellement la vitesse relative  $u_i^f - u_i^p$  pourront être importants, ce qui suppose de couvrir a priori une large gamme de valeurs pour le nombre de Reynolds  $Re_p$ .

## 2.2.4 Le tenseur des contraintes granulaire $\sigma_{ij}^p$

Dans le cas du milieu granulaire sec (voir la partie 2.1.2), la relation entre le tenseur des contraintes du milieu granulaire et la pression granulaire est donnée par une rhéologie viscoplastique locale (équations 2.6-2.7) couplée à la loi de friction (l'équation 2.4). Dans le cas d'un milieu granulaire sensible au frottement fluide, la rhéologie peut être différente comme l'a montré Courrech du Pont *et coll.* [2003] dans une géométrie de tambour tournant. En effet, nous avons vu que dans le cas sec, il suffit d'un seul nombre sans dimension,  $I$ , pour décrire le comportement du système. Ce nombre est un ratio entre le temps de chute d'une particule et le temps de déformation. Cette vision permet d'introduire le rôle du fluide : sa présence peut modifier le temps de chute d'une particule et donc modifier l'expression du nombre  $I$ . Dans leur article, Courrech du Pont *et coll.* [2003] se sont intéressés à la durée des avalanches en variant la taille et la densité des particules et la viscosité du fluide. Ils ont mis en évidence 3 régimes :

- Régime de chute libre, il correspond au cas du granulaire sec où la force de traînée est négligeable :

$$\mathcal{I}^{chute} = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{p^p/\rho^p}}$$

- Régime visqueux ( $Re \ll 1$ ), dans ce régime, la bille chute dans le fluide à sa vitesse terminale imposée par la traînée visqueuse :

$$\mathcal{I}^{visq} = \frac{\dot{\gamma}\eta_f}{p^p}$$

- Régime turbulent ( $Re \gg 1$ ), la bille chute dans le fluide à sa vitesse terminale imposée par la traînée turbulente :

$$\mathcal{I}^{turb} = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{p^p/(\rho^f C_d)}}$$

avec  $C_d$  un coefficient de traînée d'ordre 1.

Comme on peut le voir sur le diagramme de phase de la figure 2.4b, les trois régimes sont contrôlés par deux nombres sans dimensions qui sont le nombre de Stokes qui compare le temps de chute libre au temps visqueux :

$$St = \frac{d\sqrt{p^p\rho^p}}{\eta_f}$$

et le nombre  $r$  qui compare le temps de chute libre d'une particule au temps turbulent :

$$r = \frac{\rho_p}{\rho_f C_d}$$

L'utilisation du  $\mathcal{I}^{visq}$  dans la loi  $\mu(I)$  (équation 2.4) a permis de modéliser les écoulements immergés dans un liquide (Aussillous *et coll.* [2013], Boyer *et coll.* [2011], Cassar *et coll.* [2005], Ouriemi *et coll.* [2009], Pailha *et Pouliquen* [2009]).

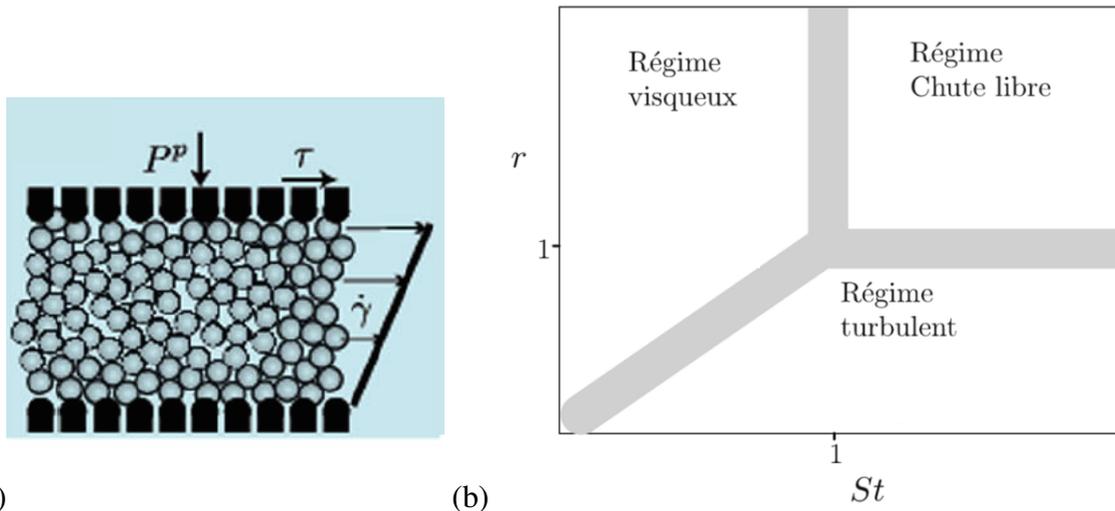


FIGURE 2.4 – (a) Cisaillement plan bidimensionnel immergé dans un fluide. Extrait de [Boyer et coll. \[2011\]](#), (b) diagramme des différents régimes d’écoulement dans le plan  $(St, r)$ , pour l’expérience du cisaillement plan immergé comme montré sur la figure à gauche. Extrait de [Andréotti et coll. \[2011\]](#).

Dans notre configuration où nous considérons un écoulement d’air dans un milieu granulaire, nous nous situons dans le régime de chute libre du fait de la valeur élevée du nombre de Stokes et du ratio élevé entre la masse volumique du solide et du gaz. Ainsi la rhéologie du milieu granulaire n’est pas influencée par la présence du fluide interstitiel et le tenseur des contraintes peut-être décrite par les lois valables pour le régime sec décrites dans la partie 2.1.2.

## 2.3 Sur la vidange de silo

### 2.3.1 Introduction

Les silos sont des réservoirs destinés à stocker des grains en vrac. Ils sont couramment utilisés dans diverses activités industrielles (dans les domaines de l’agro-alimentaire, pharmaceutique etc.). La vidange de silo est largement étudiée depuis les travaux pionnier d’[Hagen \[1852\]](#), tant du point de vue expérimental (on peut citer par exemple [Beverloo et coll. \[1961\]](#), [Nedderman et coll. \[1982\]](#), [Tüzün et coll. \[1982\]](#), [Mankoc et coll. \[2007\]](#), [Janda et coll. \[2012\]](#), [Rubio-Largo et coll. \[2015\]](#)) que numérique par des simulations discrètes (par exemple [Hirshfeld et Rapaport \[2001\]](#), [Rycroft et coll. \[2006\]](#), [Hilton et Clearly \[2011\]](#), [Staron et coll. \[2014\]](#)) ou continues ([Staron et coll. \[2012, 2014\]](#)). Cependant malgré la simplicité du système, de nombreuses questions restent ouvertes.

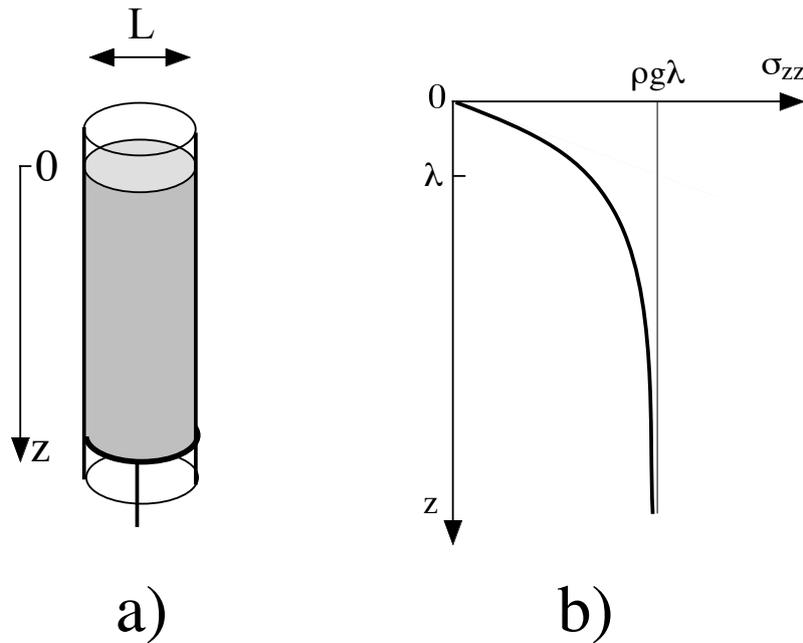


FIGURE 2.5 – Modèle de Janssen pour la contrainte dans un silo cylindrique.

### 2.3.2 Statique du silo : le modèle de Janssen

Dès 1852 [Hagen \[1852\]](#) effectua des mesures de la pression au fond d'un silo statique et proposa une modélisation dans un article dont on peut trouver une version traduite par [Tighe et Sperl \[2007\]](#). Cette étude a été revisitée par Janssen en 1895 qui a mesuré la pression en bas d'un réservoir rempli de maïs (voir l'article original de Janssen traduit par [Sperl \[2006\]](#)). Le résultat principal est qu'à mesure que l'on verse du maïs, la pression ressentie sur la base inférieure du silo semble saturer : la pesanteur ressentie par le bas du silo n'égale pas la pesanteur totale du silo rempli. Il a alors développé un modèle simple qui permet de calculer la répartition des contraintes et qui est considérée comme une base de la description des silos. Nous allons présenter brièvement le principe de ce modèle. On considère un silo cylindrique de diamètre  $L$  rempli d'un milieu granulaire de densité  $\rho_p$ , de fraction volumique  $\phi$  et de hauteur  $H$  comme schématisé sur la figure 2.5a. Afin de déterminer la distribution des contraintes, Janssen fait les trois hypothèses suivante :

- (i) La contrainte verticale sur une surface horizontale  $\sigma_{zz}$  est supposée uniforme dans la section du silo.
- (ii) Le frottement des grains sur les parois correspond à une contrainte égalant la limite de glissement. Sur les parois, il existe ainsi une contrainte verticale (tangentielle à la paroi)  $\tau_p = \mu_w \sigma_{rr}$ , où  $\mu_w$  est le coefficient de friction parois-grain et  $\sigma_{rr}$  est la contrainte normale (donc horizontale) au niveau des parois.
- (iii) Les contraintes normales horizontale et verticale sont proportionnelles :  $\sigma_{xx} = K \sigma_{zz}$  où  $K$  est une constante (dans un fluide la pression est isotrope et  $K = 1$ ).

Ainsi, on trouve que  $\tau_p = K \mu_w \sigma_{zz}$ .

L'équilibre d'une tranche de matériau d'épaisseur  $dz$  s'écrit alors :

$$\frac{\pi L^2}{4} (\sigma_{zz|z} - \sigma_{zz|z+dz}) - \pi L dz \tau_p + \phi \rho_p g dz \frac{\pi L^2}{4} = 0$$

$$\text{soit } \frac{d\sigma_{zz}}{dz} = \rho g - \frac{4K\mu_w}{L} \sigma_{zz}$$

On pose  $\lambda = L/4\mu_w K$  et on intègre l'équation en considérant qu'en haut du silo ( $z = 0$ ) la pression est nulle,

$$\sigma_{zz} = \phi \rho_p g \lambda (1 - e^{-z/\lambda}), \quad (2.16)$$

Cette solution est représentée sur la figure 2.5b. Le résultat important du modèle de Janssen est que la pression sature vers le bas du silo à la valeur  $p^p(z \gg \lambda) = \sigma_{zz}(z \gg \lambda) = \phi \rho_p g \lambda$ . Pour des épaisseurs de grains supérieures à  $\lambda \approx 2L$ , tout ajout de matériau dans le silo ne changera pas la pression au fond : le surplus de poids sera supporté entièrement par la friction sur les parois. Expérimentalement, cette saturation en pression est un phénomène expérimentalement éprouvé tant que les conditions de remplissage sont bien contrôlées (Vanel *et coll.* [2000], Ovarlez *et coll.* [2003]). Dans le cas d'un silo rectangulaire de largeur  $L$  et d'épaisseur  $W$ , le résultat est le même avec la longueur caractéristique  $\lambda = (L + W)/2\mu_w K$ .

### 2.3.3 Les régimes de vidange d'un silo

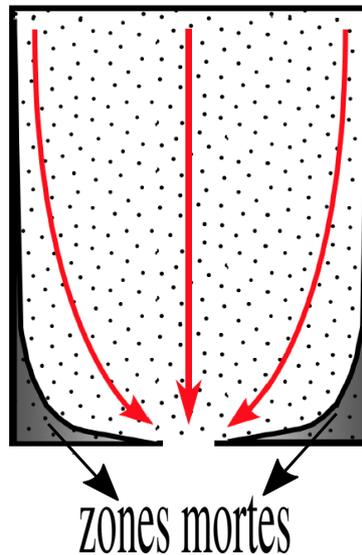


FIGURE 2.6 – Schéma d'un écoulement au sein d'un silo. Près des bords inférieurs et loin de l'orifice il existe des zones mortes (grisées) où les grains sont statiques. Extrait de Meffeja [2012]

En fonction du ratio entre la taille de l'orifice et la taille de particules, on distingue trois régimes de vidange d'un silo. Pour des orifices relativement petits, correspondant typiquement à moins de 4 diamètres de particule, l'écoulement est rapidement bloqué du fait de la formation d'une arche près

de la sortie. On peut par exemple citer les travaux de [To et coll. \[2001\]](#), [Zuriguél et coll. \[2005\]](#), [Mankoc et coll. \[2009\]](#) et [Janda et coll. \[2009\]](#) sur ce régime qui pose encore de nombreuses questions. Pour des tailles d'orifice intermédiaires, l'écoulement devient intermittent : des phases d'écoulement et de blocage se succèdent au cours de la vidange ([Pennec et coll. \[1996\]](#)). Enfin, lorsque l'orifice est suffisamment grand, l'écoulement devient continu. Dans ce régime continu, au cours d'une vidange, on observe les différents régimes d'écoulement identifiés dans la partie 2.1.1, comme illustré sur la figure 2.6 : proche des bords inférieurs du silo et loin de son orifice nous observons des zones dites mortes ou stagnantes où les grains sont immobiles. Les autres grains sont en écoulement fluide et accélèrent près de la sortie. Au niveau de la sortie du silo, l'écoulement devient plus dilué, tendant vers l'état "gazeux".

### 2.3.4 Un débit indépendant de la hauteur de la colonne

Une propriété remarquable de la vidange d'un silo, à l'instar de celle d'un sablier, est que son débit est constant au cours du temps. Ainsi, le débit de grains sortant de l'orifice est indépendant de la hauteur de la colonne de grains dans le silo. C'est un comportement très différent de celui d'un fluide pour lequel, d'après la formule de Torricelli (1643), le débit massique est proportionnel à la racine carrée de la hauteur de fluide et donc diminue au fur et à mesure de la vidange. Cette différence explique la simplicité des sabliers comparé aux horloges à eau, les clepsydres (cf figure 2.7). L'explication de cette particularité reste ambiguë. L'effet Janssen expliquerait en partie cette propriété : la pression au niveau de l'orifice ne dépendant pas de la hauteur, il en est de même du débit. Cependant même si cet effet d'écrantage de la pression existe toujours en conditions d'écoulement ([Bertho et coll. \[2003\]](#), [Perge et coll. \[2012\]](#)), plusieurs études expérimentales ont montré que le débit est indépendant de la pression à la base du silo ([Aguirre et coll. \[2011\]](#), [Perge et coll. \[2012\]](#), [Rubio-Largo et coll. \[2015\]](#)).

### 2.3.5 Loi d'échelle du débit de la vidange

Les expériences de vidange de silo ont montré que le débit est non seulement indépendant de la hauteur du silo mais aussi de sa largeur ([Nedderman \[1992\]](#)). Si les grains sont petits devant l'ouverture, leur taille n'intervient pas non plus et il est alors possible de raisonner par analyse dimensionnelle pour trouver la vitesse de vidange : la seule longueur pertinente restante est le diamètre d'ouverture  $D$ . Il vient alors que la vitesse de vidange est de l'ordre de :

$$v \approx \sqrt{gD} \quad (2.17)$$

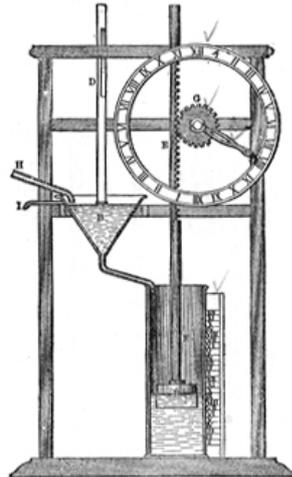


FIG. 29. — A COMMON FORM OF CLEPSYDRA IN GREEK AND ROMAN TIMES.

FIGURE 2.7 – Exemple de sablier et de clepsydre

Pour un silo à fond plat, rempli d'un milieu granulaire de densité  $\rho_p$  à la fraction volumique  $\phi_b$ , le débit massique  $Q$  est alors de la forme suivante :

$$Q = C \rho_p \phi_b g^{1/2} (D)^{N-1/2}, \quad (2.18)$$

où  $N$  est la dimension du silo et  $C$  un coefficient d'ordre 1. [Hagen \[1852\]](#) suivi de [Brown et Richards \[1970\]](#) ont proposé d'interpréter ce comportement par la présence d'une arche s'appuyant sur l'orifice en dessous de laquelle les particules seraient en chute libre ("free fall arch"). Une telle arche de taille caractéristique d'ordre  $D$  permet de retrouver la loi d'échelle 2.17 pour la vitesse. Cette représentation est largement utilisée ([Hilton et Clearly \[2011\]](#), [Nedderman \[1992\]](#)). Cependant des mesures récentes par [Rubio-Largo et coll. \[2015\]](#) de l'accélération des particules au dessus de l'orifice, issus d'expérience 2D et de simulations discrètes 3D ont montré que l'accélération des particules varie continument d'une valeur nulle dans le silo à  $g$  sur la sortie (figure 2.8a), suggérant que les particules ne sont jamais en chute libre. Cette variation se fait néanmoins sur une taille caractéristique d'ordre  $D$ . Ils ont également montré que les contraintes de contact entre les particules ne sont pas nulles dans cette zone. Des mesures de fraction volumique sur l'orifice ont également montré que le milieu granulaire reste dense, avec une légère dilatation quand le nombre de particules dans l'ouverture diminue, [Janda et coll. \[2012\]](#). De plus, plusieurs auteurs ([Davier et Bertails-Descoubes \[2016\]](#), [Dunatunga et Kamrin \[2015\]](#), [Staron et coll. \[2012, 2014\]](#)) ont récemment simulé numériquement la vidange d'un silo en implémentant la rhéologie visco-plastique  $\mu(I)$  dans des codes de résolution de l'équation de Navier-Stokes. Ils ont montré que cette modélisation continue reproduit bien les résultats qualitatifs avec un débit de particule indépendant de la hauteur du silo et qui suit la loi d'échelle 2.18 (figure 2.8b). Les propriétés frictionnelles du milieu granulaire considéré comme un milieu continu semblent donc être à l'origine de ce comportement.

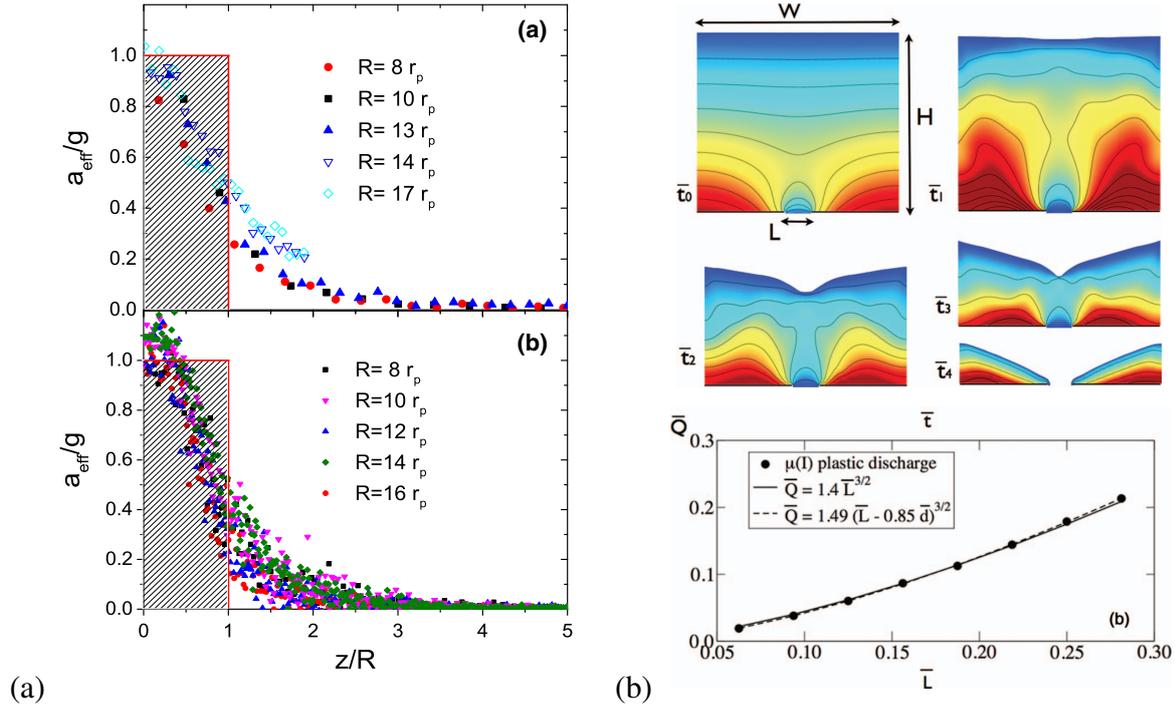


FIGURE 2.8 – Vidange de silo : (a) Mesures de l’accélération des particules au dessus de l’orifice par Rubio-Largo *et coll.* [2015], issus en haut d’expérience 2D et en bas de simulations discrètes 3D (b) Simulations numériques continues 2D avec une rhéologie visco-plastique par Staron *et coll.* [2012] : en haut champs de pression à différents instants et en bas débit massique en fonction de la taille de l’orifice.

### 2.3.6 Effet de la taille des particules

Le débit de vidange d’un silo ou d’un sablier dépend légèrement de la taille des grains (figure 2.9). En effet Hagen [1852] a également remarqué que la loi d’échelle 2.18 n’est pas pleinement satisfaisante à moins de prendre en compte un diamètre légèrement réduit pour l’ouverture ( $D - x$ ). Hagen justifie cette observation en notant que les grains qui touchent le bord de l’ouverture perdent partiellement ou totalement leur vitesse et perturbent éventuellement le mouvement de leurs voisins. Il a également observé que cette réduction correspondait à peu près à la taille des grains  $d$ . Beverloo *et coll.* [1961] a reproduit ces observations en étudiant la vidange de graines de semences d’un silo. Il a alors montré que le débit dépend légèrement de la taille des grains et a proposé la loi suivante :

$$Q = C \rho_p \phi_b g^{1/2} (D - kd)^{N-1/2}, \quad (2.19)$$

où  $C$  et  $k$  sont des coefficients qui dépendent de la géométrie du silo et des propriétés du milieu granulaire. Cette loi, connue sous le nom de “loi de Beverloo” est extrêmement robuste et est la plus couramment utilisée pour prédire le débit de vidange des silos. Dans la continuité de Hagen [1852], l’explication couramment admise de cette corrélation est la présence d’une zone dépeuplée en particules (“empty annulus”) proche des parois de l’orifice (Brown et Richards [1970]). Cepen-

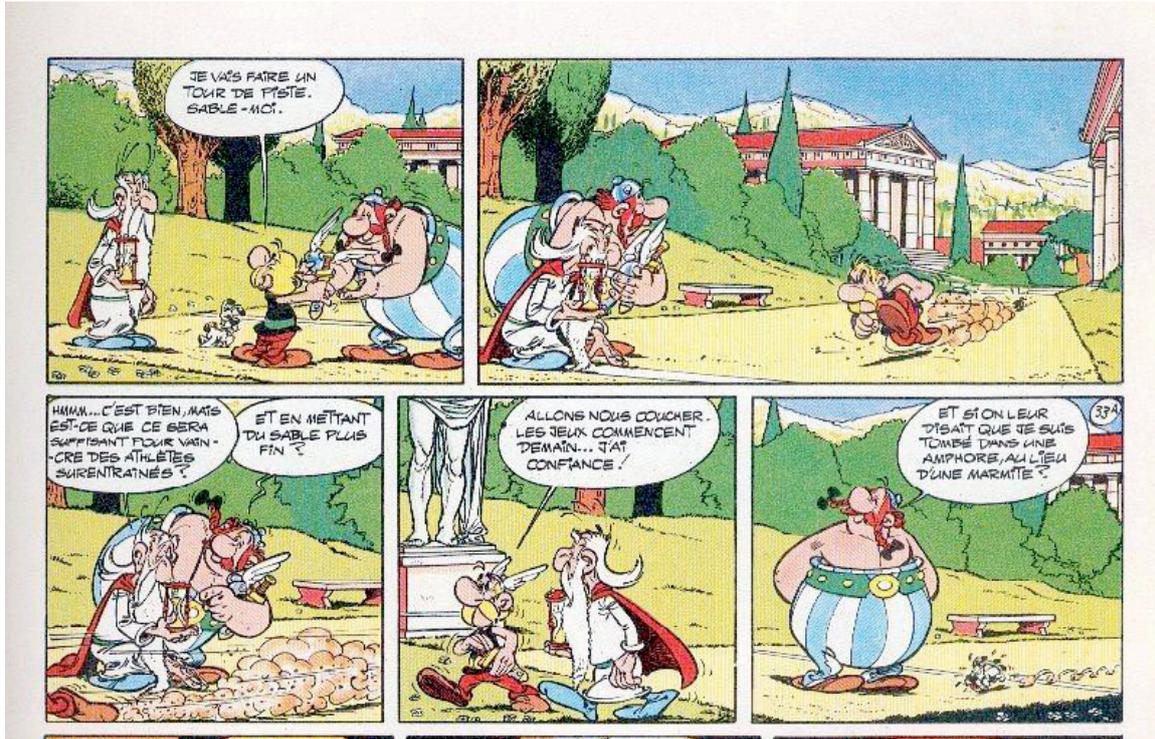


FIGURE 2.9 – Le débit de vidange d’un silo dépend de la taille des grains, extrait de GOSCINNY R. ET UDERZO A., (1968) *Astérix aux jeux olympiques*, DARGAUD.

dant cette explication n’a pas été confirmée expérimentalement.

Récemment une autre loi, basée sur des mesures expérimentales, a été proposée par [Janda et coll. \[2012\]](#) pour prendre en compte l’effet de la taille des particules. Janda et coll. ont effectué des expériences de vidange d’un silo rectangulaire ne contenant qu’une épaisseur de particules et ont filmé l’écoulement des particules au niveau de l’orifice. Les profils de vitesse et de fraction volumique des particules (figure 2.10) sont auto-similaires lorsqu’on varie le rayon de l’orifice  $R = D/2$  et on peut écrire  $v(x) = v_o(1 - (x/R)^2)^{0.5}$  et  $\phi(x) = \phi_o(1 - (x/R)^2)^{0.22}$ , où  $x$  est la position horizontale,  $\nu_v = 0.5$  et  $\nu_\phi = 0.22$ . Ainsi le débit est donné par :

$$Q = \rho W \int_{-R}^R \phi(x)v(x)dx = C\rho W D\phi_o v_o \quad (2.20)$$

où  $C$  est une constante d’intégration et  $\phi_o$  et  $v_o$  représentent respectivement la fraction volumique et la vitesse verticale mesurées au centre de l’orifice. Le débit est alors déterminé par ces deux grandeurs. En ce qui concerne la fraction volumique au centre  $\phi_o$ , dans la continuité des études de [Mankoc et coll. \[2007\]](#), [Janda et coll. \[2012\]](#) ont montré expérimentalement que, quand le rapport  $D/d$  est faible, le milieu granulaire tend à se dilater afin de maintenir l’écoulement. Cette dilatation suit une loi de décroissance exponentielle, adaptée par [Benyamine et coll. \[2014\]](#) sous la forme :

$$\phi_o = \xi_\phi \phi_b \left[ 1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}} \right] = \xi_\phi \phi_b G \left( \frac{D}{d} \right), \quad (2.21)$$

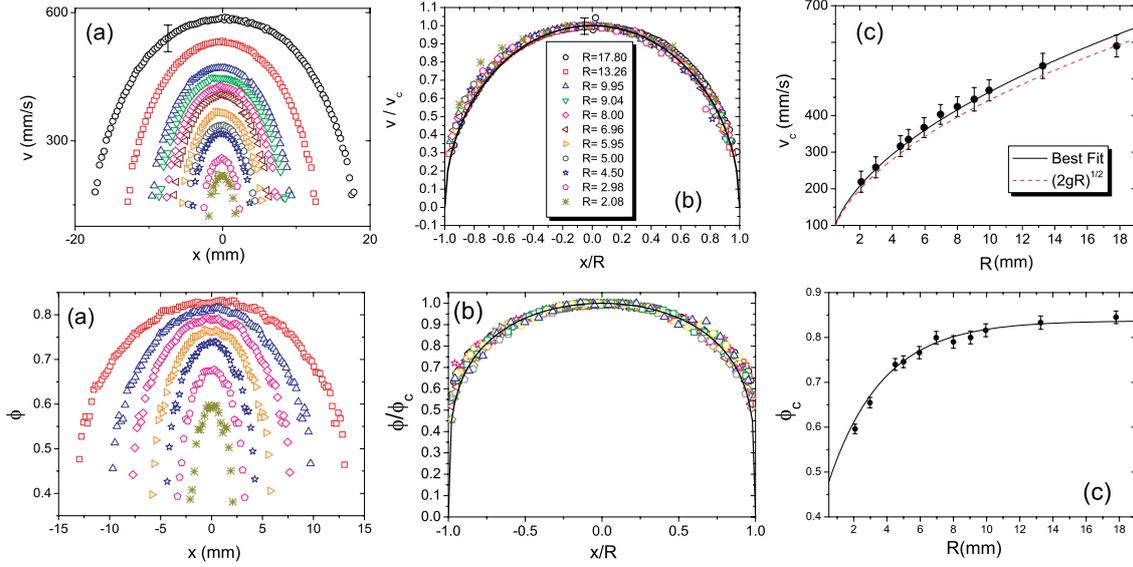


FIGURE 2.10 – Profils de vitesse et de fraction volumique à la sortie d’un silo 2D, d’après [Janda et coll. \[2012\]](#).

où  $\phi_b$  est la fraction volumique initiale de la colonne et  $G(D/d) = \left[1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}\right]$  est un facteur géométrique qui caractérise la dilatance à l’orifice avec  $\alpha = 0.5$  et  $\beta = 0.15$ . Concernant la vitesse, en variant la taille de l’ouverture pour une taille de bille donnée, [Janda et coll. \[2012\]](#) ont montré que la vitesse des billes au centre de l’ouverture ne dépend pas du rapport  $D/d$  et suit :

$$v_o = \sqrt{\gamma g D} \quad (2.22)$$

avec  $\gamma = 1.1$ . Ainsi [Janda et coll. \[2012\]](#) retrouvent bien expérimentalement la loi d’échelle 2.17 prédite par l’analyse dimensionnelle. Finalement le débit de vidange est donné par :

$$Q = C' \phi_b \rho_p G \left(\frac{D}{d}\right) S_o \sqrt{g D} = C' \phi_b \rho_p \left[1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}\right] S_o \sqrt{g D}, \quad (2.23)$$

où  $S_0$  est la surface de l’orifice. Cette expression ajuste bien les données obtenues par [Benyamine et coll. \[2014\]](#) dans le cas d’un silo rectangulaire et d’un silo cylindrique et l’ensemble de ces observations ont bien été reproduites numériquement par [Percier \[2013\]](#) dans une simulation discrète 2D. Cette approche est compatible avec une description continue d’un milieu granulaire s’écoulant hors d’un silo, même proche de l’ouverture où les fractions volumiques observées correspondent à des écoulements denses.

### 2.3.7 Effet de la polydispersité

En pratique, la vidange de silo concerne rarement des milieux granulaires monodisperses en taille. En particulier la configuration d’intérêt de cette thèse concerne des milieux fortement po-

lydisperses (cf chapitre 1). Concernant la vidange de silo de mélanges polydisperses, la plupart des études qui ont été menées s'intéressent aux phénomènes de ségrégation et peu d'auteurs se sont focalisés sur l'influence de la polydispersité sur le débit des particules. [Arteaga et Tüzün \[1990\]](#) et [Humby et coll. \[1998\]](#) ont étudié l'écoulement des mélanges bidisperse dans un silo cylindrique conique. Ils ont proposé de décrire le comportement du mélange en modifiant la loi de Hagen-Beverloo (équation 2.19) :

$$Q = C\bar{\rho}g^{1/2}(D - \bar{k}\bar{d})^{5/2}, \quad (2.24)$$

où  $\bar{\rho}$  est la densité du mélange et  $\bar{d}$  est un diamètre équivalent qui dépend de la taille des particules (respectivement  $d_f$  et  $d_c$  pour les petites et les grandes) et de la fraction massique en petites particules ( $X_f$ ) :

$$\bar{d} = X_f d_f + (1 - X_f) d_c. \quad (2.25)$$

Le paramètre  $\bar{k}$  est un coefficient ajusté qui dépend de l'empilement, selon que la phase continue est composée par les petites ou les grandes billes.

Récemment [Benyamine et coll. \[2014\]](#) ont également effectué des expériences de vidange de milieu granulaire bidisperse dans un silo à fond plat, en géométrie cylindrique et rectangulaire. Ces auteurs ont proposé un modèle physique simple pour décrire l'écoulement du mélange qui est basé sur le modèle de [Janda et coll. \[2012\]](#) et les trois hypothèses suivantes :

- (i) Pour chaque type de particule, la fraction volumique garde la même forme auto-similaire. La fraction volumique au centre peut alors être décomposé en :

$$\phi_o = \phi_{of} + \phi_{oc}, \quad (2.26)$$

où  $\phi_{of}$  et  $\phi_{oc}$  sont les fractions volumiques des petites et des grandes particules au centre de l'orifice.

- (ii) Pour chaque taille de particules, l'expression de la dilatation (équation 2.21) est toujours valide, indépendamment de la présence des autres particules,

$$\phi_{oi} = \xi \phi_{bi} G \left( \frac{d_i}{D} \right), \quad (2.27)$$

pour ( $i = f, c$ ), où  $\phi_{bf} = X_f \phi_b$  et  $\phi_{bc} = (1 - X_f) \phi_b$  représentent la fraction volumique initiale du silo des petites et grandes particules.

- (iii) Le profil de vitesse garde une forme auto-similaire qui est indépendante du diamètre des particules (équation 2.22).

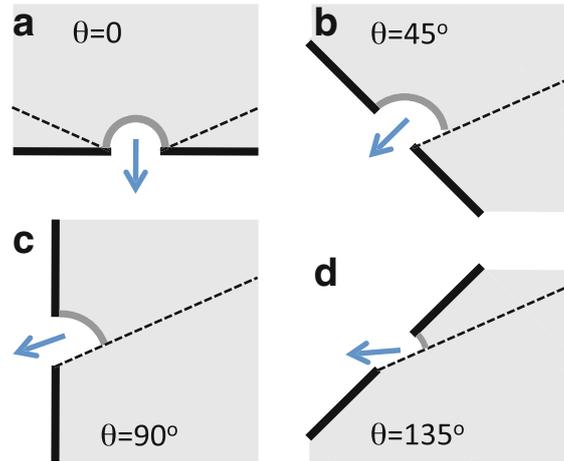


FIGURE 2.11 – Schéma du silo incliné d’après Sheldon et Durian [2010]. La paroi du silo est indiquée par la ligne noire épaisse. Le milieu granulaire dense est grisé. La ligne pointillée idéalise la frontière de la zone morte et l’arche dynamique est idéalise par la courbe gris foncé.

Avec ces hypothèses, Benyamine *et coll.* [2014] prédisent le débit d’un mélange bidisperse :

$$Q = C' \left[ X_f G \left( \frac{d_f}{D} \right) + (1 - X_f) G \left( \frac{d_c}{D} \right) \right] \rho \phi_b \sqrt{g D} S_o, \quad (2.28)$$

où  $S_o$  est la surface de l’orifice. Cette prédiction est en très bon accord avec leur mesures.

### 2.3.8 Effet de la position de l’orifice

Pour simuler la vidange d’un crayon de combustible, notre configuration d’intérêt est celle de la vidange d’un silo avec un orifice latéral. Peu d’études concernent la vidange de silo avec cette géométrie. Chang *et coll.* [1991] ont effectué des expériences de vidange de silo avec un orifice latéral circulaire et carré et des milieux granulaires différents composés de semences (blé, sorgho, maïs et soja). Ils ont trouvé que la loi d’échelle 2.18 reste valable dans cette géométrie mais que, suivant le matériau, le débit est entre 0.43 et 0.5 fois plus faible que pour un orifice en bas du silo.

Sheldon et Durian [2010] ont réalisé des expériences où ils ont fait varier l’inclinaison d’un silo à fond plat contenant des billes de verre de 0 à 156° par rapport à la verticale (figure 2.11). Les auteurs ont observé que la loi de Hagen-Beverloo 2.19 reste valable pour tous les angles et que, pour des orifices suffisamment larges, le débit décroît linéairement avec le cosinus de l’angle d’inclinaison. Selon Sheldon et Durian [2010], le succès de la loi de Beverloo dans cette configuration montre aussi que le concept d’arche de chute libre (“free fall arch”) est discutable.

Enfin, Medina *et coll.* [2014] et Serrano *et coll.* [2015] se sont principalement intéressés à l’influence de l’épaisseur des parois sur la vidange de sable et de sucre, respectivement pour un orifice latéral où pour divers angles d’inclinaison du silo. En particulier ils ont montré que l’écoulement

ne pouvait avoir lieu si la paroi est trop épaisse :

$$\arctan(D/E_p) < \theta_r$$

où  $D$  représente la taille de l'orifice,  $E_p$  l'épaisseur de la paroi et  $\theta_t$  l'angle de repos du milieu granulaire. [Serrano et coll. \[2015\]](#) propose une corrélation afin de tenir compte de l'ensemble des paramètres en préfacteur de la loi de Beverloo.

Il ressort de cette analyse que relativement peu de travaux se sont intéressés à une configuration géométrique proche de notre cas d'intérêt.

### 2.3.9 Effet d'un écoulement d'air

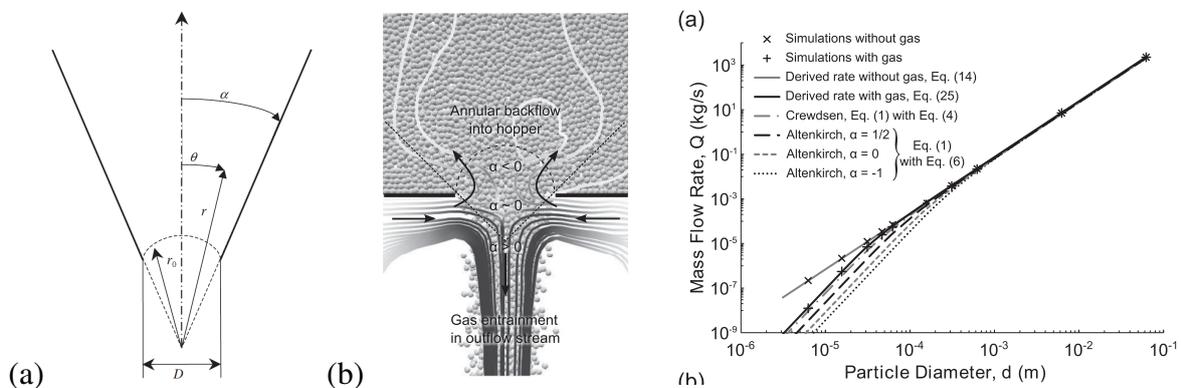


FIGURE 2.12 – (a) Schéma du silo conique issu [Barletta et coll. \[2003\]](#), (b) Écoulement complexe de l'air dans la simulation discrète et débit en fonction de la taille des particules avec ou sans gaz interstitiel d'après [Hilton et Clearly \[2011\]](#).

Pour des particules suffisamment petites, on ne peut plus négliger les frottements avec le fluide interstitiel même en l'absence de mouvement d'ensemble du fluide. L'influence de l'air peut aussi jouer un rôle prépondérant dans le cas des silos fermés, comme les sabliers. Enfin un écoulement de gaz peut être utilisé pour assister la vidange. Ainsi les études réalisées concernent aussi bien l'effet de l'air à co-courant ([Altenkirch et Eichhorn \[1981\]](#), [de Jong \[1969\]](#), [de Jong et Hoelen \[1975\]](#), [Nedderman et coll. \[1983a\]](#)) qu'à contre courant ([Altenkirch et Eichhorn \[1981\]](#), [Crewdson et coll. \[1977\]](#), [Hilton et Clearly \[2011\]](#), [Hsiao et coll. \[2010\]](#)). Dans les études expérimentales, des mesures de pression sont en général couplées avec les mesures de débit de particules ([de Jong \[1969\]](#), [Nedderman et coll. \[1983a\]](#), [Resnick et coll. \[1966\]](#)). Ces mesures ont mis en évidence l'importance du profil de pression fluide proche de l'orifice et l'avantage d'injecter de l'air à proximité de l'orifice plutôt qu'en haut du silo ([de Jong \[1969\]](#)). Les différentes observations ont conduit de nombreux auteurs à modéliser l'effet de l'air par une modification ad-hoc de la loi de Beverloo (équation 2.19) en ajoutant un terme de gradient de pression ([Crewdson et coll. \[1977\]](#))

au terme moteur qu'est la gravité :

$$Q = C \rho_p \phi_b \left[ g + \frac{1}{\rho_p \phi_b} \frac{dp}{dr} \Big|_0 \right]^{1/2} (D - kd)^{5/2} \quad (2.29)$$

où  $\frac{dp}{dr} \Big|_0$  est le gradient de pression sur l'arche dynamique de chute libre  $r = r_0$ . Ces modèles supposent que le mouvement des particules en chute libre sous l'arche dynamique est modifié par la force de traînée qui est donné par le gradient de pression. Celui-ci est en général déterminé en utilisant l'équation de Darcy (équation 2.13) ou d'Ergun (équation 2.15).

Dans la géométrie du silo conique, [Altenkirch et Eichhorn \[1981\]](#) a développé une méthode alternative pour modéliser l'effet de l'air en appliquant les lois de la thermodynamique à l'écoulement du milieu granulaire et du fluide. L'équation de Darcy a également été utilisée dans ce contexte.

Enfin, [Hilton et Clearly \[2011\]](#) calcule le débit des particules en présence de l'air en résolvant directement le mouvement des particules sous l'arche dynamique et en supposant que les particules y sont soumises uniquement à la gravité et au frottement de l'air. Leur modèle ajuste bien leurs résultats de simulations numériques discrètes couplées avec un code Navier-Stokes.

## 2.4 Conclusion

Cette présentation de l'état de l'art des connaissances concernant les écoulements couplés de milieux granulaire et fluide permet de constater que l'on ne dispose pas a priori de modèle permettant de prédire le débit de fragments dans la configuration d'intérêt.

On a vu que ces écoulements sont le résultat de la dynamique des contacts entre grains, de la pesanteur et du frottement grain-fluide. Si tous ces éléments peuvent être représentés à l'échelle du grain (et faire l'objet de simulations numériques discrètes), on ne dispose pas d'une modélisation plus macroscopique basée sur les seules propriétés physiques du milieu. Ainsi, la vidange d'un silo reste modélisée de manière empirique, c'est à dire sans que l'ensemble des coefficients de la loi de Beverloo aient pu être reliés à des mécanismes physiques. Néanmoins, des modélisations continues, basées sur des rhéologies granulaires permettent de prédire de manière phénoménologiquement satisfaisante certaines dynamiques, comme la vidange de silo ou l'influence du frottement pariétal. En outre, la description du couplage entre grain et fluide peut s'exprimer via des lois issues des écoulements dans les poreux.

La démarche d'étude que nous poursuivons dans les chapitres suivants repose sur ces constats. Après avoir déterminé expérimentalement le rôle des différents paramètres (géométrie du réservoir, orientation de l'orifice, taille des grains, débit de l'écoulement gazeux) sur le débit de vidange, nous proposerons des lois d'échelle et examinerons la capacité des modèles décrivant macroscopiquement l'écoulement à reproduire ces lois. Ceci nous aidera à interpréter les tendances observées. Le cas échéant, nous utiliserons des simulations numériques discrètes pour justifier des com-

portements supposés de l'écoulement granulaire qui ne sont pas observables expérimentalement. Dans le prochain chapitre nous allons présenter les dispositifs expérimentaux ainsi que les outils numériques utilisés aux cours de cette thèse.

# Chapitre 3

## Systeme experimental et outils numériques

Nous avons conduit principalement deux séries d'expériences au laboratoire pendant la durée de cette thèse. La première avait pour objectif d'étudier la vidange d'un silo avec un orifice latéral. La seconde a permis d'étudier l'effet de l'injection d'air sur la vidange de silo avec orifice inférieur ou latéral. Dans ce chapitre, nous allons d'abord détailler les dispositifs expérimentaux et les techniques expérimentales utilisés pour les deux séries d'expériences, puis les techniques spécifiques à la seconde série. Enfin, nous allons présenter des outils numériques que nous avons utilisés pour interpréter les résultats expérimentaux.

### 3.1 Systeme experimental d'étude de la vidange d'un silo avec orifice latéral

#### 3.1.1 Choix du dispositif

##### a. Configurations du silo

Nous avons d'abord effectué quelques expériences de vidange de silo avec un orifice inférieur comme schématisé sur les images des figures 3.1a et 3.1b. Nous utiliserons les résultats de ces expériences comme référence. Ensuite, nous avons étudié la vidange d'un silo avec un orifice latéral comme schématisé sur les images des figures 3.1c et 3.1d. Nous pouvons voir que deux types de silos ont été utilisés : (i) des silos rectangulaires qui nous permettent d'avoir une meilleure visualisation et (ii) des silos cylindriques plus faciles à fabriquer et qui préservent la géométrie d'intérêt. Par la suite, nous allons présenter plus spécifiquement les dispositifs et procédures des expériences pour le cas d'un orifice latéral. Notons que le milieu granulaire utilisé et la plupart des procédures des expériences sont les mêmes dans les diverses configurations.

Le silo rectangulaire est démontable comme on peut le voir sur la photo 3.2a. Il est composé d'une plaque en cuivre (paroi postérieure) qui est reliée à la terre afin d'éviter l'accumulation d'électricité statique, d'une plaque en plexiglas (paroi antérieure) qui nous permet un accès visuel,

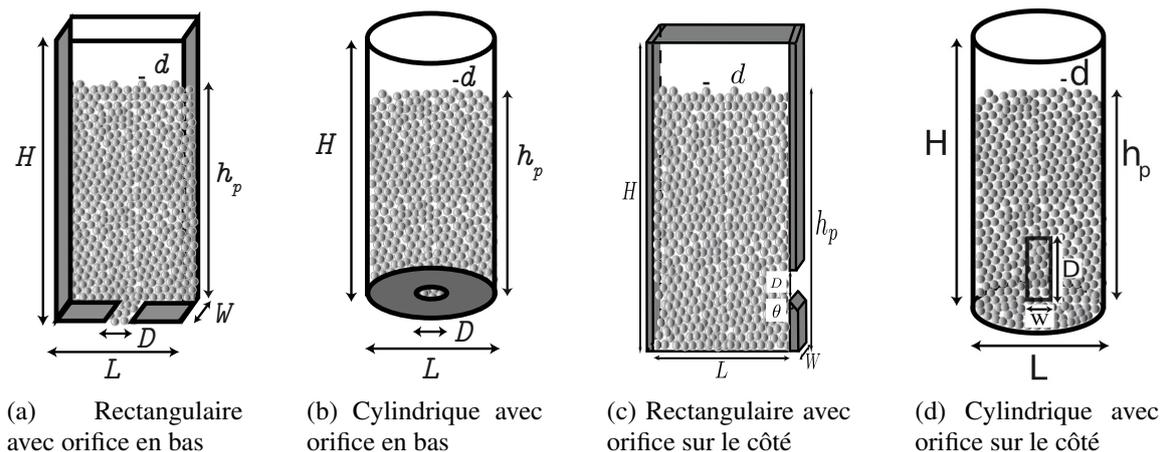


FIGURE 3.1 – Schémas des différentes configurations du silo

et de quatre cales en plexiglas (parois latérales) qui sont usinées par une découpeuse laser. Nous utilisons six serre-joints pour assembler ces composants en un silo. Nous pouvons ainsi facilement faire varier l'épaisseur du silo  $W$  en modifiant l'épaisseur des cales. L'orifice de hauteur  $D$  s'étend sur toute la largeur du silo  $W$ .

Le silo cylindrique est composé de trois parties qui s'assemblent par vissage comme on peut le voir sur la figure 3.2b : une section cylindrique de longueur 400mm qui constitue le réservoir principal de particules du silo, une prolongation cylindrique de même section qui comprend l'orifice latéral, et un couvercle avec un joint torique en caoutchouc qui constitue la base du silo. Plusieurs prolongations ont été usinées afin de faire varier la taille et la forme de l'orifice comme on peut le voir sur la photo 3.2c où trois exemples sont montrés. Il est à noter que, pour le silo cylindrique,  $W$  représente la longueur de l'arc horizontal de l'orifice. Les dimensions géométriques de l'ensemble des orifices utilisés sont données dans le tableau 3.1.

TABLE 3.1 – Caractéristiques géométriques des silos.

	Rectangulaire	Cylindrique
$L$ (mm)	60	40
$H$ (mm)	500	540
$W$ (mm)	3.5 ; 5 ; 10 ; 20 ; 30 ; 40	5 ; 10.1 ; 15.4 ; 20.9 ; 33.9 ; 62.8
$D$ (mm)	2.7 ; 5.4 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 ; 35	5 ; 10 ; 20 ; 25 ; 30 ; 35 ; 40 ; 41.5

## b. Études préliminaires sur l'influence de la position verticale de l'orifice et de l'épaisseur de la paroi latérale.

Des études préliminaires ont été effectuées afin d'éliminer l'influence d'autres paramètres géométriques des silos considérés pour les expériences. Le premier paramètre est l'épaisseur de la paroi latérale en bas de l'orifice qui peut avoir une influence importante sur le débit de vidange

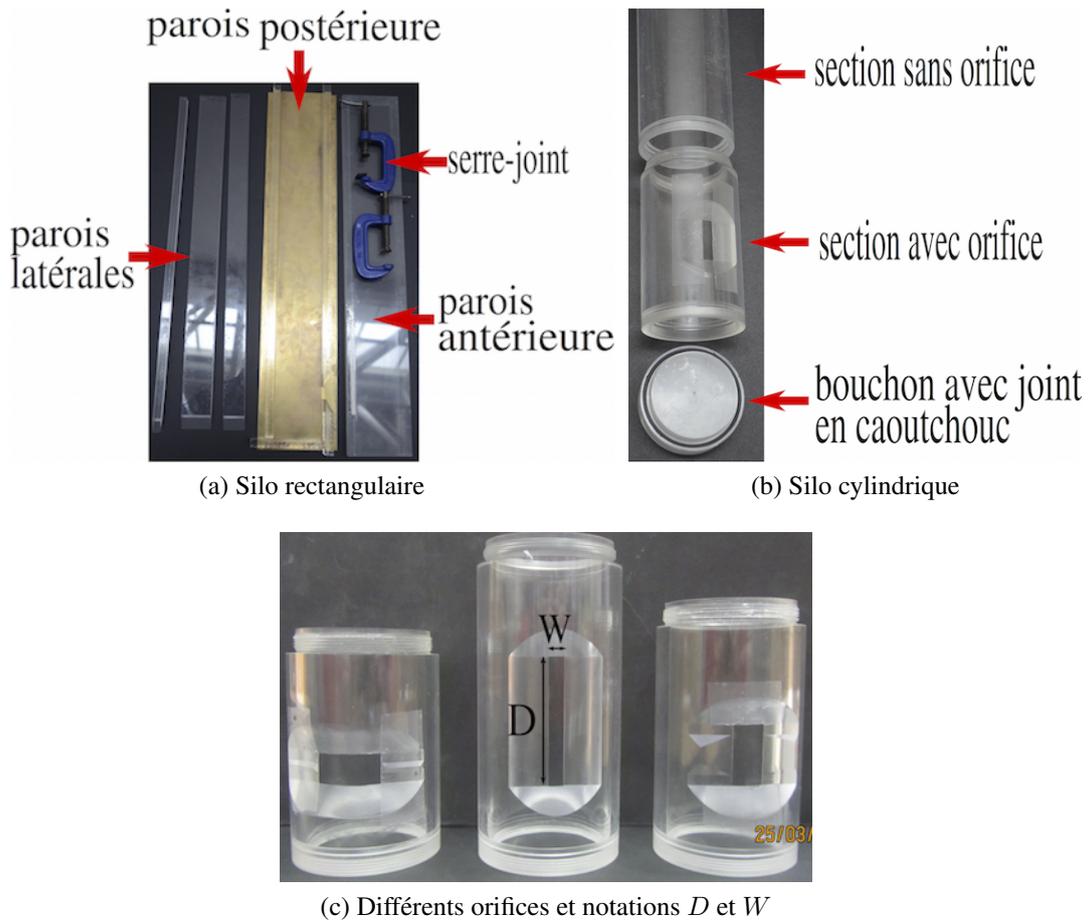


FIGURE 3.2 – Photographies des composants du silo

(Medina *et coll.* [2014], Serrano *et coll.* [2015]). Afin d'éliminer ce paramètre, nous avons fait biseauter la paroi d'un angle  $\theta$  par rapport à la verticale, représenté sur la figure 3.1c. Nous avons étudié l'influence de cet angle  $\theta$  sur le débit de vidange (la mesure du débit sera détaillée dans la section 3.1.3) et nous pouvons voir sur la figure 3.3a que le débit est plus important quand  $\theta = 60^\circ$  par rapport au cas  $\theta = 90^\circ$ . Néanmoins si nous continuons à diminuer  $\theta$  à  $30^\circ$ , le débit est équivalent au cas  $\theta = 60^\circ$ . Notons que les expériences ont été répétées deux fois et que la reproductibilité est satisfaisante. L'interprétation physique de ce résultat est que le frottement des particules sur l'épaisseur de la paroi latérale de la partie inférieure de l'orifice influence le débit de vidange. En biseautant suffisamment cette paroi, pour des angles  $\theta$  inférieurs à  $60^\circ$ , on élimine pratiquement ce frottement. Par conséquent nous avons choisi  $\theta = 30^\circ$  pour les deux configurations rectangulaire et cylindrique comme on peut le voir sur les photos 3.2a et 3.2c.

Le deuxième paramètre est la distance, notée  $z_{bas}$ , entre le bas de l'orifice et le fond du silo. Nous pouvons voir sur la figure 3.3b que si l'orifice est au fond du silo, c.-à-d.  $z_{bas} = 0$ , le débit est légèrement plus élevé que dans le cas  $z_{bas} > 0$ . Tant que  $z_{bas} > 0$ , cette distance n'a pas d'influence sur le débit. Dans nos expériences, nous avons imposé  $z_{bas}$  entre  $20mm$  et  $30mm$  afin de garder une épaisseur de particules assez grande. Nous verrons que ceci permet d'avoir une zone

morte de l'écoulement granulaire en bas du silo et de s'affranchir de l'influence du frottement des grains sur la base du silo. Cela correspond à une couche d'environ 15 particules pour les plus grosses particules.

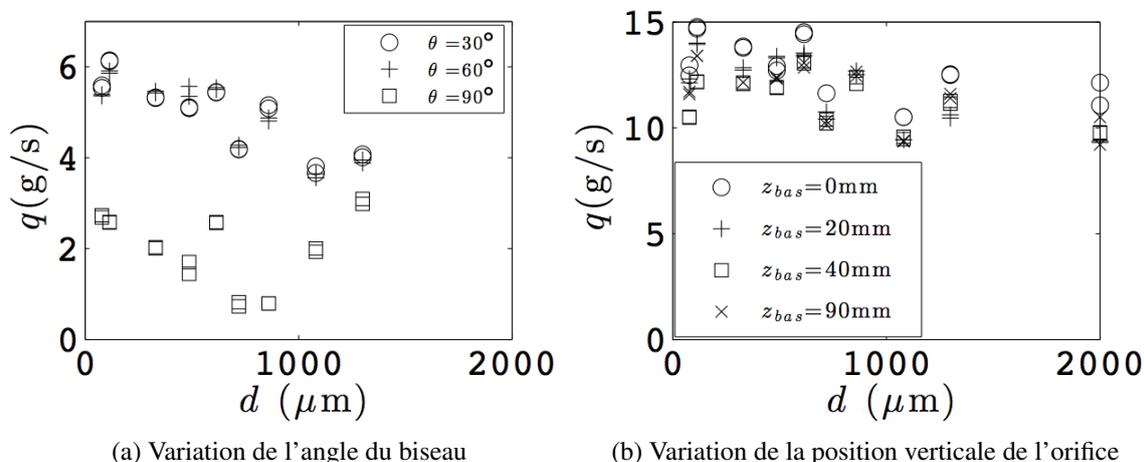


FIGURE 3.3 – Débit massique de particules en fonction de la taille des particules.

### c. Milieu granulaire

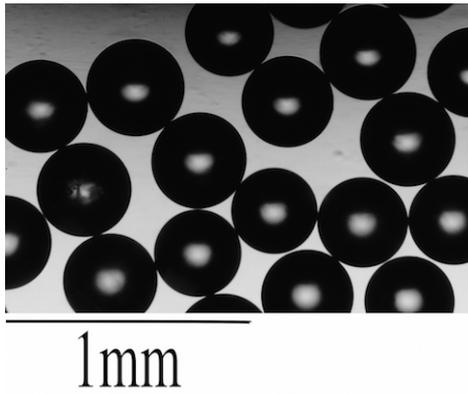
Nous avons utilisé des billes de verre sphériques de densité  $\rho_p = 2500\text{kg}/\text{m}^3$  fournies par *Potter&Ballotini*. La gamme de taille de particules est [74; 124; 190; 375; 538; 762; 1129; 1347]  $\mu\text{m}$ . Afin d'éviter la cristallisation, les billes ont été tamisées à peu près entre  $0.9d$  et  $1.1d$ . Ainsi, les billes sont considérées comme quasi-monodisperses en taille avec une faible dispersion statistique dans la distribution des particules autour de la valeur moyenne. Les billes sont alors observées au microscope : par exemple, pour un échantillon de billes de taille  $d = 375\mu\text{m}$ , nous obtenons l'image de la figure 3.4a. Nous pouvons voir que les billes sont relativement bien sphériques. À l'aide du logiciel ImageJ, nous mesurons le diamètre des billes à partir de ces photos manuellement en utilisant l'outil règle. Pour un échantillon de  $n$  billes,  $d$  est calculé par une moyenne arithmétique,

$$d = \frac{\sum_i^n d_i}{n} \quad (3.1)$$

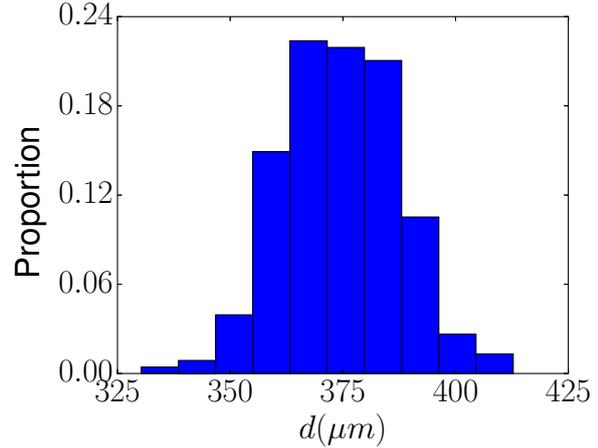
où  $d_i$  représente le diamètre de la  $i^{\text{ème}}$  particule. La figure 3.4b montre la distribution de diamètre obtenue pour le même échantillon que dans la figure 3.4a, elle montre un écart type de  $\pm 25\mu\text{m}$ . Cet ordre de grandeur est cohérent avec le tamisage effectué.

### 3.1.2 Procédure expérimentale

Lors d'une expérience de vidange, on remplit le silo avec une masse initiale  $m_t$  connue de billes de verre, l'orifice étant bouché. Immédiatement après le remplissage, nous mesurons la



(a) Photographie de l'échantillon observé au microscope



(b) Distribution des diamètres moyens issue d'un traitement d'images.

FIGURE 3.4 – Analyse de la dispersion en taille d'un échantillon de billes de verre de taille moyenne  $375\mu\text{m}$ .

hauteur de la colonne de particules  $h_p$ . La fraction volumique de billes initiale de la colonne est évaluée par :

$$\phi_b = m_t / (\rho_p h_p S_b) \quad (3.2)$$

où  $S_b$  est la surface de la section horizontale du silo ( $S_b = LW$  pour le silo rectangulaire et  $S_b = \pi L^2/4$  pour le silo cylindrique). Après la phase préparatoire, nous ouvrons l'orifice : les grains sortent du silo et sont collectés dans un récipient (figure 3.5). L'évolution temporelle de la masse  $m(t)$  contenue dans ce récipient est enregistrée à l'aide d'une balance électronique (Mettler Toledo 6002S) avec une précision de  $0.1\text{g}$  et une fréquence d'acquisition de  $20\text{Hz}$ . Dans le cas des silos rectangulaires, le mouvement des particules est enregistré à l'aide d'une caméra rapide avec un objectif de la marque SIGMA de distance focale variable entre  $24$  et  $70\text{mm}$ .

### 3.1.3 Traitement des données et incertitudes des mesures

Plusieurs quantités ont été mesurées et post-traitées afin de caractériser le mouvement des particules lors de la vidange :

- La fraction volumique initiale des particules dans le silo  $\phi_b$
- Le débit massique des particules
- Le champs de vitesse au sein du silo

#### a. Fraction volumique initiale du silo

La fraction volumique initiale  $\phi_b$  est évaluée par l'équation 3.2. Nous avons observé que  $\phi_b$  dépend du remplissage du silo avec une grande variabilité. Afin d'illustrer cette dispersion, nous



FIGURE 3.5 – Photo d’un silo rectangulaire rempli de billes de verres et dispositif de collecte.

avons représenté sur la figure 3.6 la moyenne et l’écart type des mesures de  $\phi_b$  en fonction de la taille des billes  $d$ . La barre verticale autour du symbole indique l’écart type de la distribution de

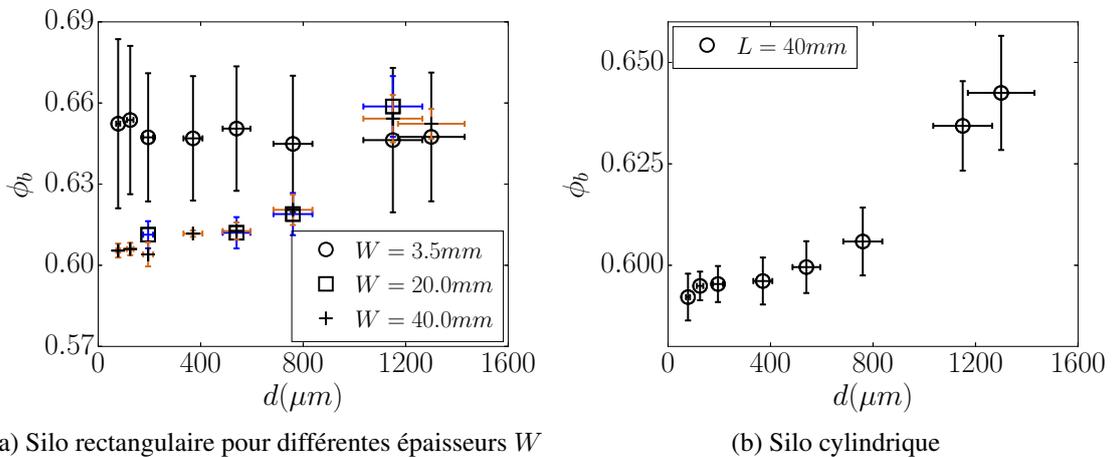
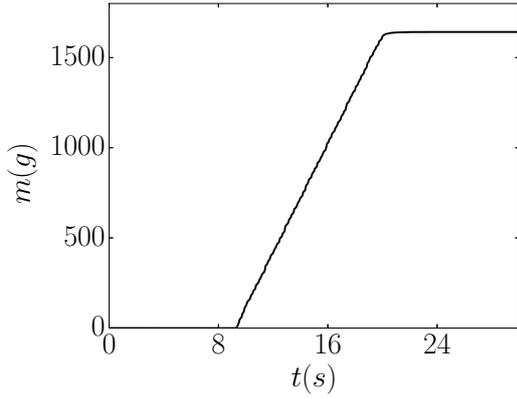
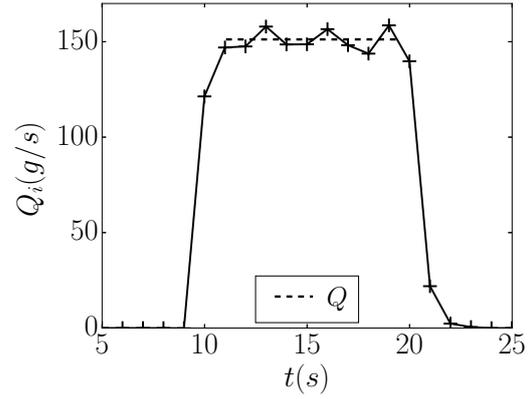


FIGURE 3.6 – Fraction volumique du silo  $\phi_b$  en fonction de la taille des particules.

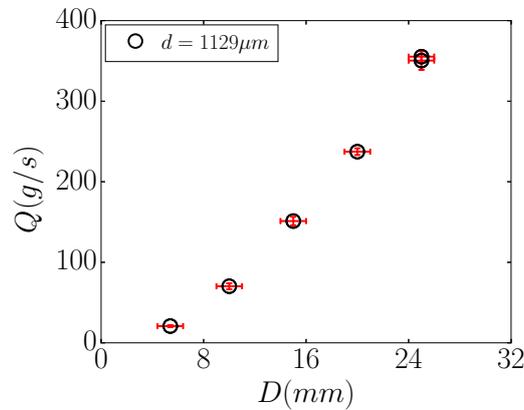
$\phi_b$ , définie par  $\sigma_\phi = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\phi_b - \bar{\phi}_b)^2 / n}$ , tandis que la barre horizontale représente l’écart type de la distribution en taille du milieu granulaire considéré. Pour les silos rectangulaires on observe une forte dispersion des résultats ( $\sigma_\phi$  élevé) pour le silo le plus fin (cas  $W = 3.5mm$ ) quelle que soit la taille des particules. Cela peut s’expliquer par l’incertitude sur le contrôle de la géométrie de ces silos à l’aide des serre-joints mais aussi par le plus faible nombre de billes dans l’épaisseur. Pour les silos plus larges, la dispersion est plus faible et l’empilement est plus lâche. Cette différence d’empilement peut être due au remplissage. En effet, on tend à remplir plus lentement le silo quand



(a) Évolution temporelle de la masse pour un orifice de taille  $D = 16mm$



(b) Débit massique instantané, la ligne pointillée représente le débit moyen  $Q$



(c) Débit moyen  $Q$  en fonction de  $D$ .

FIGURE 3.7 – Résultat typique de vidange pour une taille de particules  $d = 1129\mu m$  et un silo rectangulaire d'épaisseur  $W = 3.5mm$ .

il est plus fin, conduisant à une colonne plus compacte. Si l'on omet le silo rectangulaire le plus fin nous observons que  $\phi_b$  diminue quand  $d$  diminue pour les deux configurations, rectangulaire et cylindrique. Cet effet sature pour les petites particules  $d < 400\mu m$ . Enfin, la variabilité est plus grande pour les grandes billes pour lesquelles  $\phi_b$  est plus sensible au remplissage.

## b. Débit massique des particules

La figure 3.7a montre un résultat typique de l'évolution temporelle de la masse  $m(t)$ , enregistrée par la balance électronique à une fréquence de  $20Hz$ . Dans le cas présenté, on observe une augmentation linéaire de cette masse entre l'instant d'ouverture de l'orifice ( $t \simeq 9s$ ) et la fin de la vidange ( $t \simeq 18s$ ). Cette évolution correspond bien à une vidange avec un débit stationnaire, caractéristique de l'écoulement d'un milieu granulaire dans un silo ou un sablier (cf chapitre 2). Nous calculons alors le débit massique instantané  $Q_i = (m(t + \delta t) - m(t))/\delta t$  correspondant à la masse des particules qui sortent du silo pendant une période de temps  $\delta t = 1s$ . Le débit

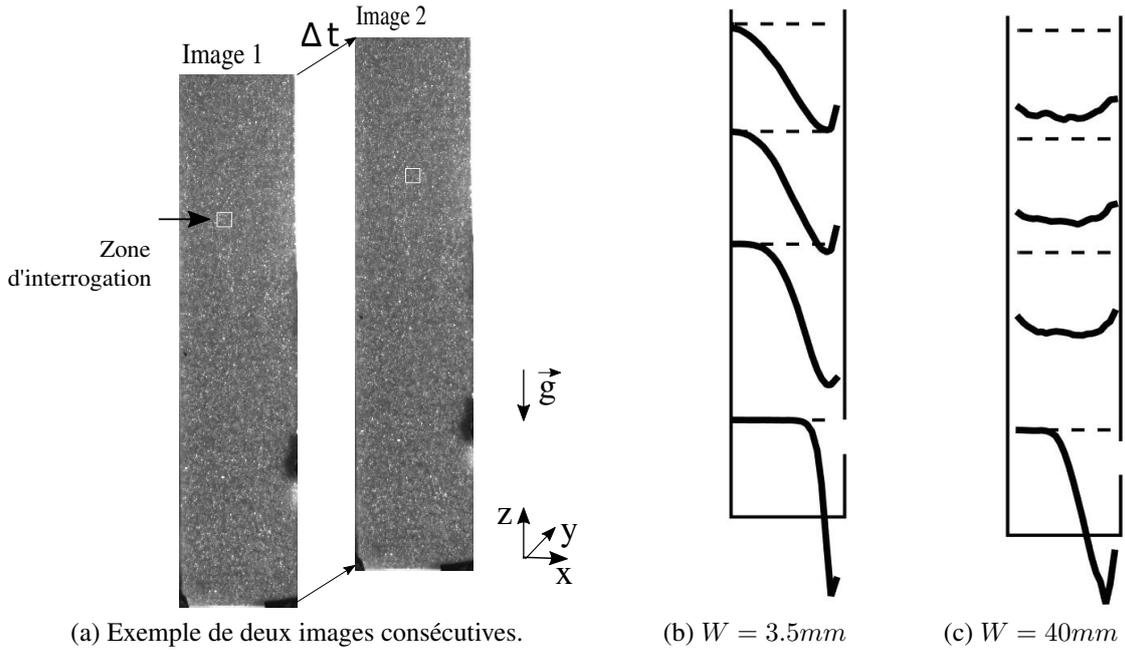


FIGURE 3.8 – Illustrations de notre utilisation de la technique PIV, cas  $d = 1150\mu\text{m}$ ,  $D = 20\text{mm}$ . Les tracés correspondent à des profils de  $\vec{v} \cdot \vec{e}_z$ ,

instantané  $Q_i$ , tracé en fonction du temps sur la figure 3.7b, présente un plateau correspondant au régime stationnaire. Le débit moyen,  $Q$ , est obtenu en moyennant le débit instantané  $Q_i$  pendant ce régime stationnaire. Nous évaluons l'incertitude sur le débit moyen  $\sigma_Q$  par l'écart type  $\sigma_Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Q_i - Q)^2}$ , où  $n$  est le nombre des points du débit instantané  $Q_i$  utilisés dans la moyenne. Dans la suite de ces études nous avons utilisé uniquement les expériences pour lesquelles le régime stationnaire dure plus de 3 secondes ( $n \geq 3$ ). La figure 3.7c montre le débit moyen  $Q$  en fonction de la hauteur de l'orifice  $D$ , pour des particules de diamètre  $d = 1129\mu\text{m}$ . La barre horizontale représente la dispersion des mesures, et l'on peut voir que cette dispersion reste faible sur la gamme de débit explorée qui couvre ici celle de toutes les expériences réalisées.

### c. Écoulement interne au silo

Les expériences de vidange de silo rectangulaire permettent une visualisation de la dynamique des grains au sein du silo. Nous avons ainsi pu filmer, à l'aide d'une caméra rapide, cette dynamique afin d'en déduire le champ de vitesse, les lignes de courant et la position de l'interface supérieure des particules. Les images ont une résolution de  $256 \times 1024$  pixels. Nous avons utilisé le logiciel DPIVsoft réalisé par P. Meunier, T. Leweke et R. Lebescond (<https://www.irphe.fr/~meunier/>), dont les principes sont décrits dans l'article de Meunier et Leweke [2003]. Ce logiciel contient un algorithme de PIV (Vélocimétrie par Imagerie de Particules) qui est une technique standard pour mesurer des champs de vitesse instantanés. Les mesures s'effectuent entre deux images séparées d'un temps  $\Delta t$  (figure 3.8a). L'image est quadrillée

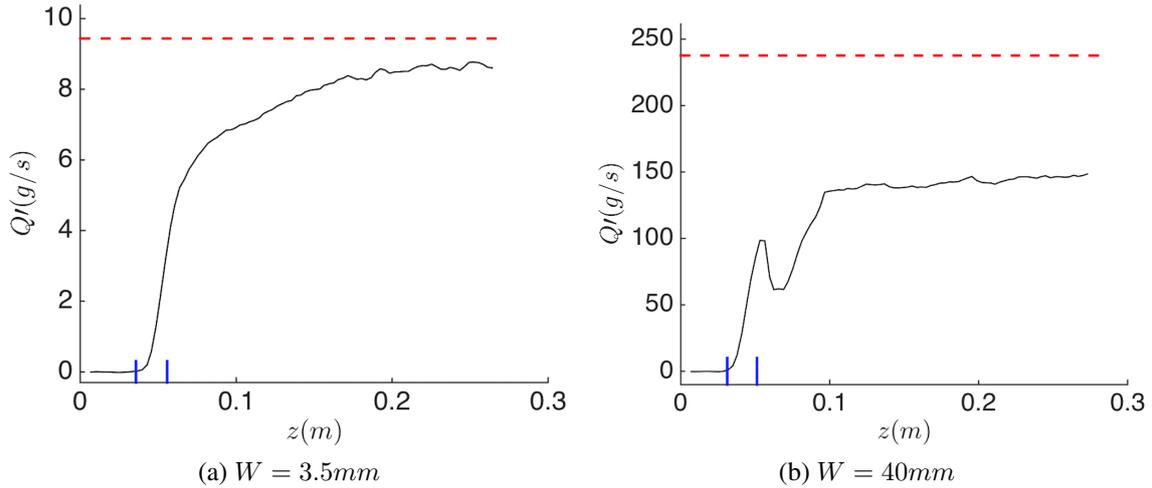


FIGURE 3.9 – Débit déduit de la PIV,  $Q'$ , en fonction de la position verticale,  $z$ , pour des particules de taille  $d = 1129\mu m$  et une ouverture  $D = 20mm$ .

en zones d'interrogation dont l'utilisateur définit la taille et sur lesquelles la mesure de vitesse va être effectuée. Pour chaque zone d'interrogation, le logiciel calcule la fonction d'intercorrélation entre cette fenêtre et la deuxième image sur la base de transformées de Fourier numériques. Les points brillants sur les billes de verre, dues aux réflexions de lumière, constituent les traceurs. Le déplacement moyen des traceurs de la zone d'interrogation est alors donnée par la position du pic de corrélation.

Nous avons étudié le champ Eulérien de vitesse dans le plan vertical pour les particules de taille  $d = 1129\mu m$ . Les mesures de PIV s'effectuent d'abord entre deux images consécutives séparées d'un intervalle de temps  $\Delta t = 0.004s$ . Nous avons alors moyenné les valeurs de vitesse pendant le temps où l'écoulement est stationnaire. Nous avons fait varier la taille de la zone d'interrogation pour optimiser les résultats. Finalement nous avons choisi une taille de zone d'interrogation de  $16 \times 16$  pixels qui représente  $7.3 \pm 0.2mm$  soit environ  $6d$ , la taille de cette zone devrait être assez grande pour contenir au moins 4 traceurs tout en restant de taille raisonnable afin de ne pas perdre trop d'information. Nous avons tracé sur les figures 3.8b et 3.8c le profil de vitesse verticale  $\vec{v} \cdot \vec{e}_z$  à différentes positions verticales au sein du silo pour deux valeurs de l'épaisseur du silo  $W$  extrêmes. Les lignes pointillées représentent les positions verticales  $z$  où ces profils sont obtenus. Nous pouvons voir que les profils sont bien réguliers. Nous pouvons alors déduire un débit vertical de la mesure PIV avec la relation

$$Q'(z) = \rho_p \phi_b W \int_0^L \vec{v} \cdot \vec{e}_z dx.$$

Ce débit est tracé sur la figure 3.9 en fonction de la position verticale  $z$  pour les cas de la figure 3.8.

La ligne en pointillés rouges représente le débit mesuré par la balance et les traits bleus

délimitent la position de l'orifice. Nous pouvons voir que  $Q'$  vaut 0 en bas de l'orifice, ce qui est cohérent avec le fait que l'écoulement est principalement horizontal à la sortie. Puis ce débit augmente avec  $z$  et tend vers une valeur constante. Cette constante doit théoriquement égaler le débit donné par la balance. On constate que le débit déduit des mesures PIV est inférieur au débit de vidange, et ce d'autant plus que la largeur du silo est importante. Ceci est sans doute dû au fait que l'écoulement à la paroi ne suffit pas pour obtenir le débit qui varie dans l'épaisseur du silo. Le champ de vitesse déduit de la PIV ne permet donc pas d'estimer précisément le débit. Par contre ces champs de vitesse donnent une information qualitative sur l'écoulement notamment en permettant de déterminer les zones mortes de l'écoulement.

## 3.2 Vidange du silo avec injection d'air

### 3.2.1 Choix du dispositif

La figure 3.10 montre le schéma et une photo du dispositif utilisé pour les expériences avec injection d'air. Nous avons utilisé les mêmes billes de verres que dans l'expérience précédente. De même, nous avons utilisé les deux géométries de silo (rectangulaire et cylindrique) et les deux positions de l'orifice (inférieur et latéral) comme schématisé sur la figure 3.1. Nous allons détailler les composants du dispositif dans les sous-parties suivantes.

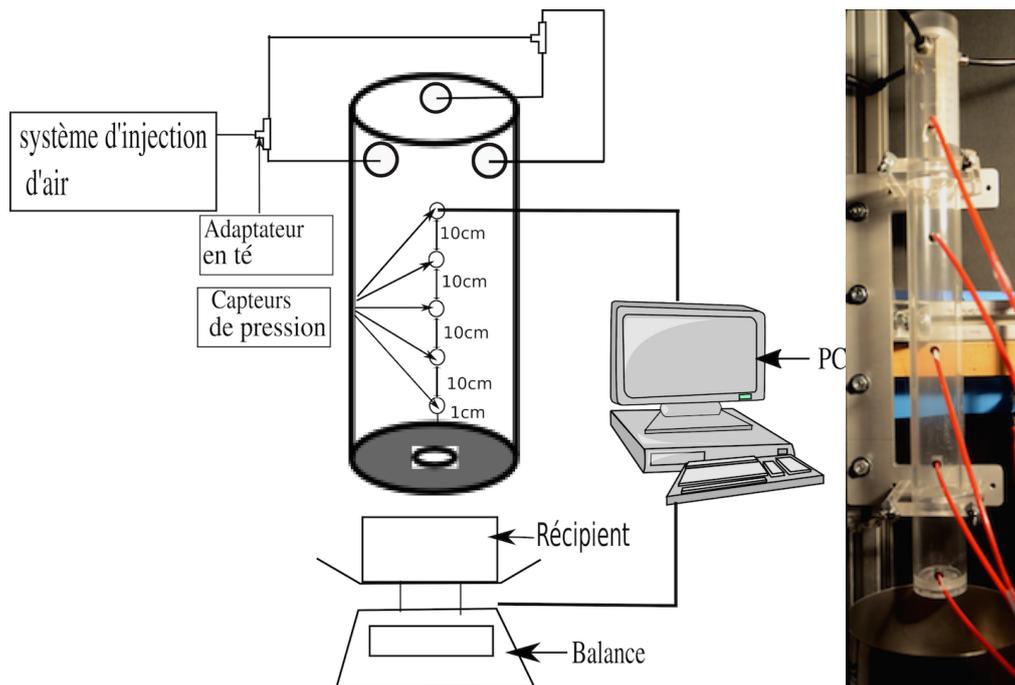


FIGURE 3.10 – Schéma et photo du dispositif de l'expérience de vidange de silo avec injection d'air.

#### a. Configurations du silo

L'étanchéité du silo est nécessaire pour cette expérience. Ceci nous a amené à revoir la conception du silo rectangulaire : il est maintenant composé d'une plaque en plexiglas, un couvercle avec un joint en caoutchouc et une plaque métallique avec un joint en caoutchouc, les trois parties étant collées comme on peut le voir sur la figure 3.11a. L'étanchéité des silos cylindriques est plus simple à réaliser : nous avons simplement bouché le silo en haut en utilisant un couvercle comme dans l'expérience précédente, et bouché le silo en bas avec un couvercle qui a un orifice au milieu, comme schématisé sur la figure 3.11b. L'étanchéité est assurée par des joints toriques en caoutchouc. Pour le cas avec un orifice latéral, le tube est percé d'un orifice sur le côté comme sur la figure 3.2c et il est bouché en haut et en bas par des couvercles sans orifices. Les caractéristiques

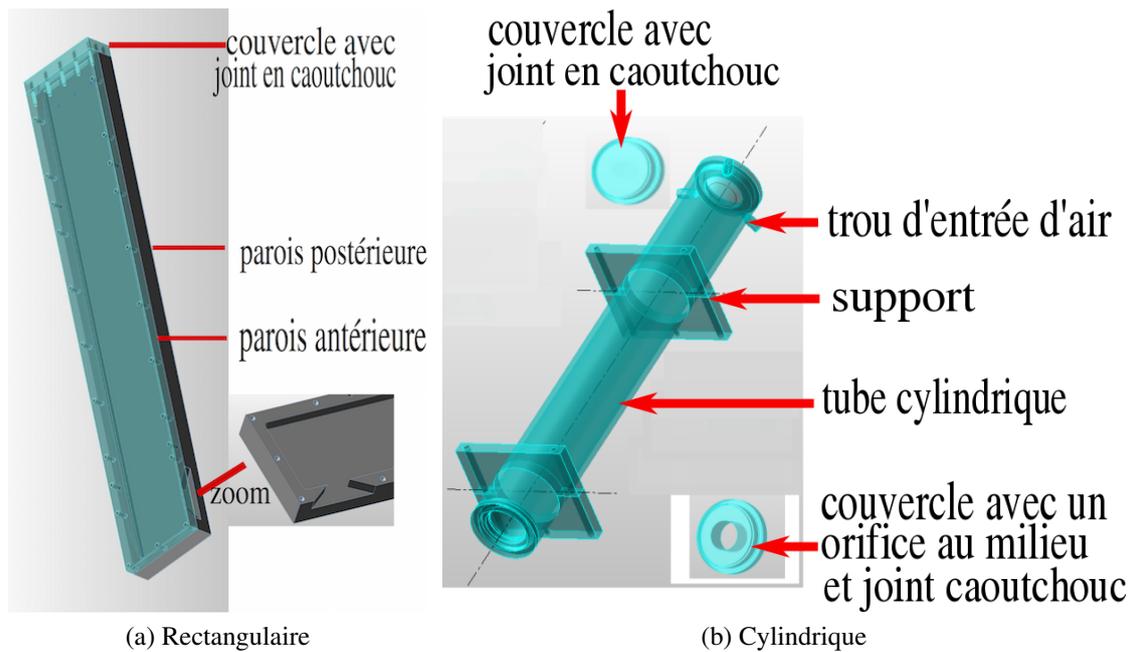


FIGURE 3.11 – Schéma du silo.

géométriques des différents silos utilisés dans cette expérience sont données dans le tableau 3.2. Une seule taille de silo rectangulaire a été utilisée, tandis que trois diamètres  $L$  ont été considérés pour le silo cylindrique.

TABLE 3.2 – Caractéristiques géométriques des silos.

	Rectangulaire	Cylindrique
$L$ (mm)	60	20 ; 40 ; 60
$H$ (mm)	500	540
$W$ (mm)	3.5	Orifice inférieur : - Orifice latéral (rectangulaire) : 5 ; 10
$D$ (mm)	Orifice inférieur : 10 Orifice latéral : 10 ; 20	Orifice inférieur (circulaire) : 10 ; 20 Orifice latéral (rectangulaire) : 10 ; 20

## b. Système d'injection d'air

Afin de pouvoir injecter l'air dans le silo, nous avons utilisé le réseau d'air comprimé du laboratoire sur lequel nous avons branché notre circuit d'air composé de tubes de diamètre intérieur de  $4\text{mm}$ , d'un régulateur de pression avec filtre de la marque SMC (gamme entre 0 à  $1\text{MPa}$ ), d'une vanne, d'un second régulateur de pression de la marque SMC (gamme entre 0 à  $0.2\text{MPa}$ ), d'un système imposant une grande perte de charge, et d'un débitmètre de la marque Aalborg (gamme 0 –  $5\text{l/min}$  ou 0 –  $50\text{l/min}$  avec un temps de réponse de l'ordre d'une seconde). Le circuit d'air est représenté sur la figure 3.12.

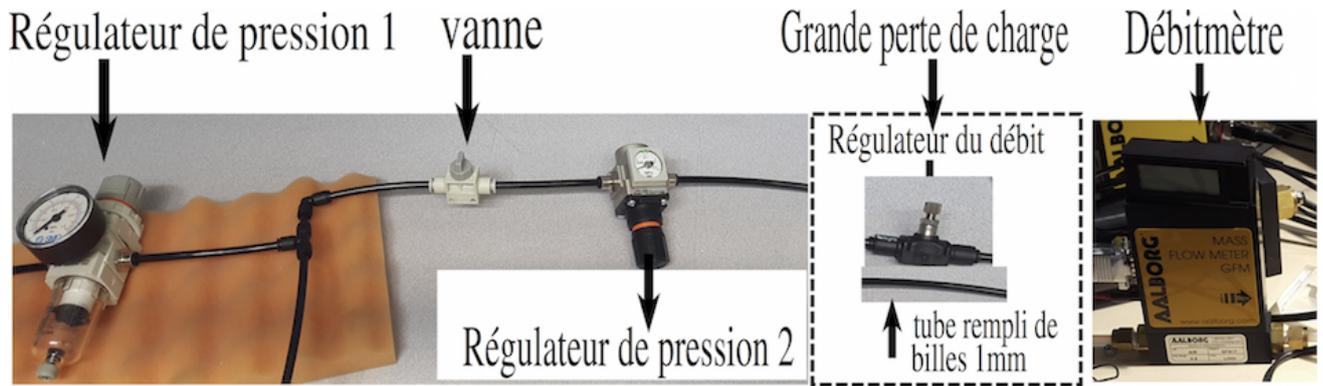


FIGURE 3.12 – Système d'injection d'air avant l'entrée du silo.

### 3.2.2 Expérience à des débits d'air imposés

Afin de faciliter leur interprétation, nous avons choisi de réaliser nos expériences à débit d'air imposé. Pour cela nous introduisons dans notre circuit un système qui nous permet de contrôler le débit en imposant la perte de charge totale. En effet, le débit d'air est lié à la perte de charge entre la sortie du régulateur de pression 2 (figure 3.12) à la pression  $P_2$  et la sortie du silo, à la pression  $P_{atm}$ . Cette perte de charge peut s'écrire :

$$P_2 - P_{atm} = \Delta P_c + \Delta P_s \quad (3.3)$$

où l'on note  $\Delta P_c$  la perte de charge dans le circuit en amont du silo et  $\Delta P_s$  la perte de charge au sein du silo. On peut évaluer la perte de charge au sein du silo en utilisant la loi de Darcy et la relation de Kozeny Carman :

$$\Delta P_s \approx H_p \frac{180 \phi_b^2 \eta_{air}}{S(1 - \phi_b)^3 d^2} \left( Q_{air} - \frac{Q_p}{\rho_p \phi_b} \right)$$

où  $H_p$  est la hauteur de la colonne de particules,  $\phi_b$  la fraction volumique,  $\eta_{air}$  la viscosité dynamique de l'air,  $Q_p$  le débit massique des particules,  $\rho_p$  la densité massique de particules,  $d$  le diamètre des particules dans le silo et  $S$  la section du silo. Étant donné que la hauteur de particules dans le silo évolue au cours du temps  $H_p(t)$ , il va en être de même de  $\Delta P_s(t)$  et donc du débit d'air. Pour s'affranchir de cette variation, nous avons ajouté un système qui impose une grande perte de charge dans le circuit avant le silo, en plus des pertes régulières dues aux différents tuyaux et des pertes singulières correspondant aux changements de section et de direction dans le circuit d'air, de sorte que  $\Delta P_s \ll \Delta P_c$ . Ce système est composé de plusieurs éléments que nous pouvons mettre en série. Par perte de charge croissante il s'agit :

- (i) d'un tube de diamètre  $D_{tv} = 4mm$  et de longueur  $L_{tv} = 10m$ . La perte de charge régulière

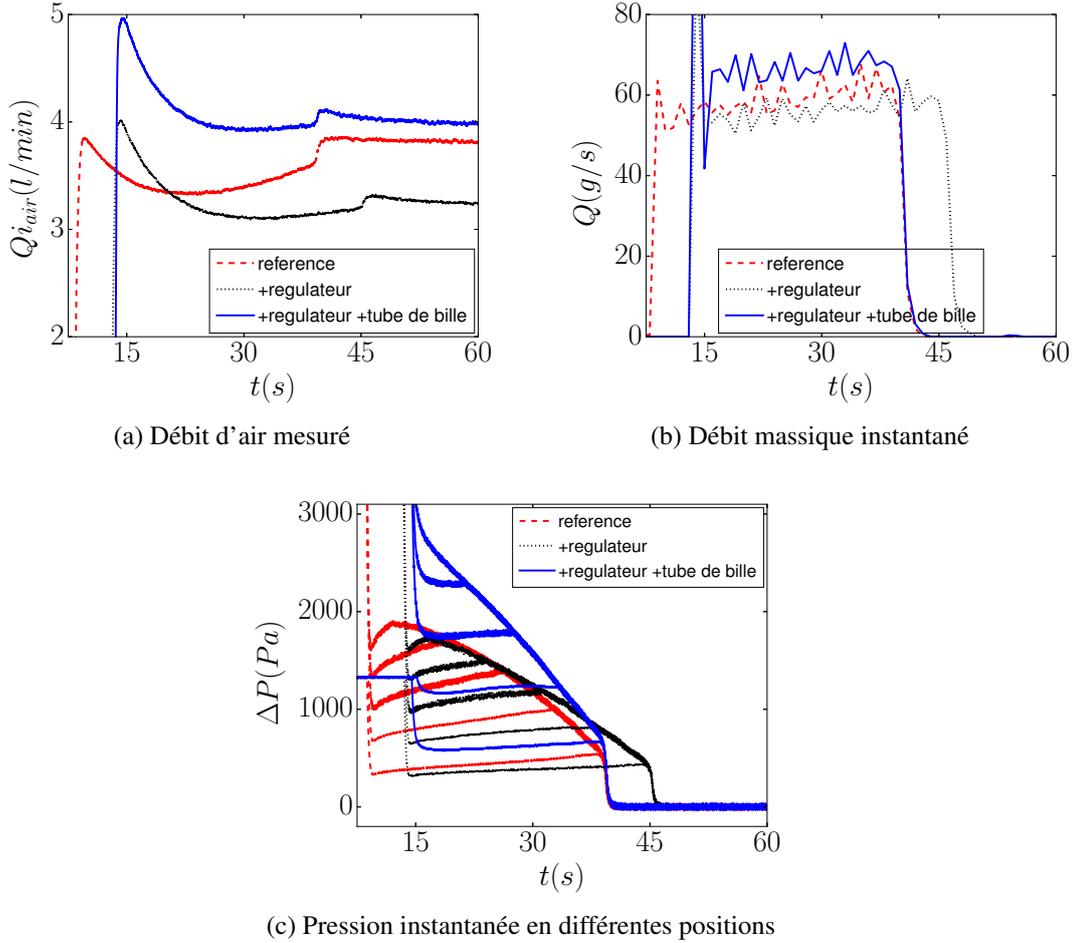


FIGURE 3.13 – Influence du système qui impose une grande perte de charge pour un silo cylindrique avec  $L = 60\text{mm}$  et  $d = 124\mu\text{m}$

de ce tube est donnée par l'équation :

$$\Delta P_{tv} = \frac{64}{Re} \frac{L_{tv}}{D_H} \frac{\rho_{air} Q_{air}^2}{2S_{tv}^2}$$

Avec  $S_{tv}$  la surface de section du tube,  $D_H$  le rayon hydraulique et  $Re = \frac{\rho_{air} Q_{air} D_H}{\eta_{air} S_{tv}}$  le nombre de Reynolds.

(ii) d'un régulateur de débit de marque Legris,

(iii) de deux tubes de diamètre  $D_{tg} = 4\text{mm}$  et de longueur  $L_{tg} = 300\text{mm}$  remplis de bille de verre de taille  $d_{tg} = 1\text{mm}$  dont on peut évaluer la perte de charge par la loi d'Ergun (Ergun [1952]) :

$$\Delta P_{tg} = L_{tg} \frac{\phi_{tg}}{(1 - \phi_{tg})^3} \left( 150 \frac{\phi_{tg} \eta_{air} Q_{air}}{d_{tg}^2 S_{tg}} + 1.75 \frac{\rho_{air} Q_{air}^2}{d_{tg} S_{tg}^2} \right)$$

avec  $S_{tg}$  la surface de section du tube des billes de verre,  $\phi_{tg}$  la fraction volumique des particules dans le tube.

Afin d'estimer l'influence de ces pertes de charge sur le débit, nous avons fait des mesures préliminaires pour un silo cylindrique de diamètre  $L = 60mm$  avec une taille de billes  $d = 124\mu m$ . Nous avons tracé sur la figure 3.13 les résultats obtenus pour différentes grandeurs mesurées. Notons qu'ici le débit d'air instantané  $Q_{air}$  (figure 3.13a) est mesuré avec un débitmètre qui a un temps de réponse de 5s qui a été remplacé par la suite par un débitmètre avec un temps de réponse plus court. Pour chaque essai, la pression (figure 3.13c) est mesurée à différentes positions verticales comme illustré sur la figure 3.10. Sur les trois graphes, les courbes rouges représentent les résultats sans ajout de perte de charge, les courbes en pointillés noirs représentent un cas avec un régulateur de débit et les courbes bleues représentent un cas avec un régulateur de débit et un tube rempli de billes de verre. Nous pouvons voir que l'ajout du régulateur stabilise un peu le débit d'air mais que l'ajout du tube de billes est nécessaire pour obtenir des débits de particules et des profils de pression pleinement stabilisés.

Nous varions la composition de ce système de perte de charge selon le débit d'air souhaité et le diamètre du silo. En effet pour avoir un débit d'air très faible, nous avons ajouté tous les tubes et le régulateur. Alors que pour atteindre un débit d'air important, nous pouvons ne mettre que le tuyau de longueur 10 m. Dans la plupart des autres cas, nous avons utilisé un tube rempli de billes de longueur 300mm et le régulateur de débit. Finalement pour toutes nos expériences, nous avons quantifié la variation relative du débit d'air au cours du temps par la relation :

$$E_{Q_{air}} = \left| \frac{\max(Q_{i_{air}}) - \min(Q_{i_{air}})}{\min(Q_{i_{air}})} \right|$$

Cette variation relative est calculée pendant le temps durant lequel le débit de particules est stationnaire, en omettant la première seconde qui correspond au temps de réponse du débitmètre. Nous avons choisi de ne pas prendre en compte les expériences correspondant à des variations relatives supérieures à 10% ( $E_{Q_{air}} > 0.1$ ). La distribution de  $E_{Q_{air}}$  des expériences pour les 3 silos cylindriques et le silo rectangulaire et un orifice en bas, est montrée sur la figure 3.14. Nous pouvons voir que dans la plupart des cas, la variation relative est inférieure à 5%, et que plus la surface de la section du silo est grande, plus le débit d'air est stable.

### 3.2.3 Tests préliminaires, précision des mesures et calibration

Avant de faire les expériences, nous avons testé l'étanchéité des silos. Pour le silo cylindrique, nous avons mesuré l'évolution temporelle de la pression dans le silo initialement mis sous pression, et nous avons vérifié sa stabilité indiquant que les silos cylindriques sont bien étanches. Parce qu'il est difficile de boucher l'orifice du silo rectangulaire, nous avons testé son étanchéité en l'immergeant dans l'eau : nous avons vérifié que si nous injectons de l'air au sein du silo, l'air sort uniquement par l'orifice (vérification visuelle de l'absence de bulles sur les parois). Pour renforcer l'étanchéité, nous avons recouvert les parois du silo avec du ruban adhésif.

Lors d'une expérience de vidange avec injection d'air, nous reproduisons d'abord le même

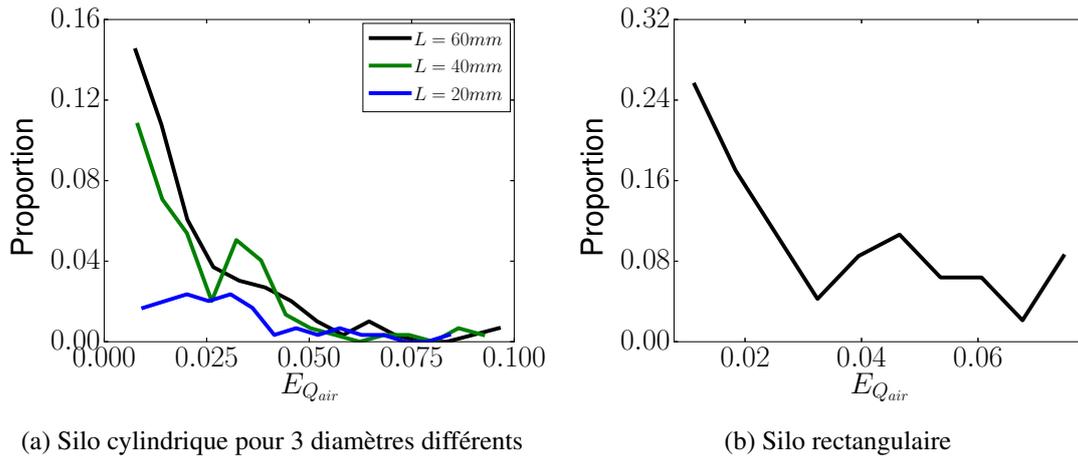


FIGURE 3.14 – Distribution de la variation relative  $E_{Q_{air}}$  des expériences avec orifice en bas.

protocole de remplissage et d'estimation de la fraction volumique initiale que lors de l'étude d'une vidange simple (voir la partie 3.1.2). Ensuite nous réglons le régulateur de pression et ajustons le système de perte de charge pour contrôler le débit d'air, puis nous injectons l'air dans le silo et ouvrons l'orifice du silo : les grains sortent du silo et sont collectés dans un récipient. L'évolution temporelle de la masse  $m(t)$  contenue dans ce récipient est enregistrée à l'aide d'une balance électronique (Mettler Toledo 6002S) avec une précision de  $0.1g$  à  $20Hz$ . L'évolution de pression est enregistrée avec des capteurs de pression avec une fréquence d'acquisition de  $100Hz$ . Nous avons utilisé des capteurs de pression différentiels de marque *Honeywell Sensing and Control* avec deux gammes différentes :  $-1245Pa$  à  $1245Pa$  ou  $-7472Pa$  à  $7472Pa$ . La deuxième entrée des capteurs est laissée ouverte, toutes les mesures de pressions effectuées le sont donc par rapport à la pression atmosphérique. Les capteurs ont une précision de  $\pm 0.25\%$ . Nous les avons calibrés en mesurant la pression hydrostatique d'un tube rempli d'eau.

### 3.2.4 Traitement des données et des mesures

Plusieurs quantités ont été mesurées et post-traitées afin de caractériser lors de la vidange :

- La fraction volumique initiale des particules dans le silo  $\phi_b$
- Le débit massique des particules
- Le débit volumique d'air
- La pression le long du silo

Un résultat de mesures du débit massique des particules, du débit volumique d'air et de la pression le long du silo est illustré sur la figure 3.13 (courbes bleues correspondant à un débit d'air stabilisé).

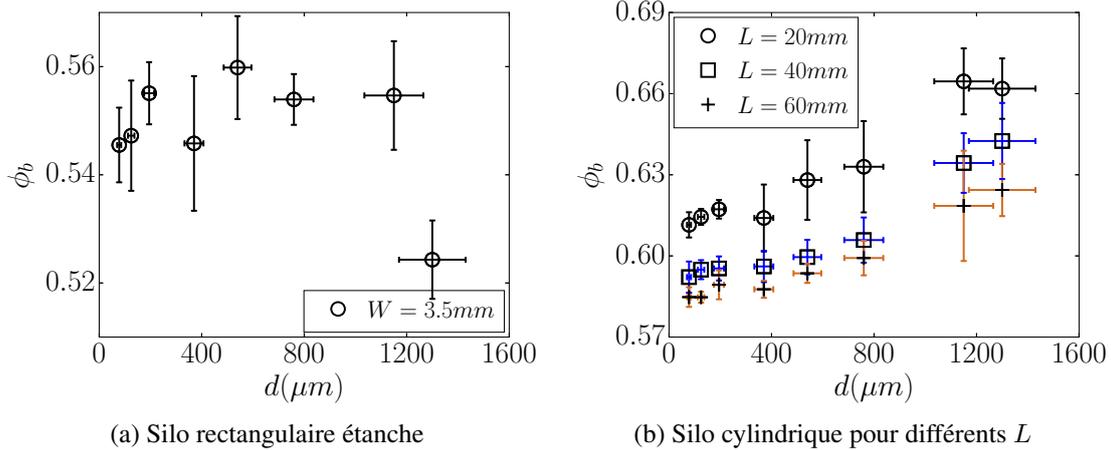


FIGURE 3.15 – Fraction volumique du silo  $\phi_b$  en fonction de la taille de particules.

### a. Fraction volumique

La technique pour calculer la fraction volumique initiale  $\phi_b$  et son incertitude est la même que dans l'expérience précédente. La figure 3.15 montre la fraction volumique initiale ainsi que la dispersion des mesures. Nous pouvons voir que la fraction volumique du silo rectangulaire étanche est plus petite que le silo rectangulaire non-étanche (en comparant les courbes 3.6a et 3.15a). C'est dû au fait que nous contrôlons mieux l'épaisseur et sa mesure dans le silo. De plus  $\phi_b$  reste constant quand  $d$  varie, hormis pour  $d = 1129\mu m$  où l'on observe une chute qui s'explique par le fait qu'on a alors seulement 2 billes dans l'épaisseur. Dans le cas des silos cylindriques nous retrouvons que la fraction volumique augmente avec le diamètre des billes. Cette tendance est valable pour les trois diamètres de silo, néanmoins  $\phi_b$  est un peu plus important pour le silo le plus étroit ( $L = 20mm$ ). Il est possible que cet effet soit associé au remplissage.

### b. Débit massique des particules et débit volumique d'air

La méthode pour calculer la valeur moyenne et l'incertitude du débit massique des particules  $Q_p$  est la même que pour l'expérience précédente. La valeur moyenne du débit volumique d'air  $Q_{air}$  est calculée sur la même période que  $Q_p$  sans tenir compte des résultats de la première seconde qui est le temps de réponse du débitmètre. Comme précédemment, nous n'avons pas considéré les mesures expérimentales correspondant à des vidanges trop rapides (temps stationnaire de vidange inférieur à 3s).

### c. Pression le long du silo et mesure du gradient de pression d'air

Dans le cas du silo cylindrique, le silo a été instrumenté avec 5 prises de pression sur la paroi, comme on peut le voir sur la figure 3.10 dans le cas de l'orifice inférieur. La première prise est placée 1cm au dessus de l'orifice puis les autres prises sont espacées de 10cm. Toutes les prises

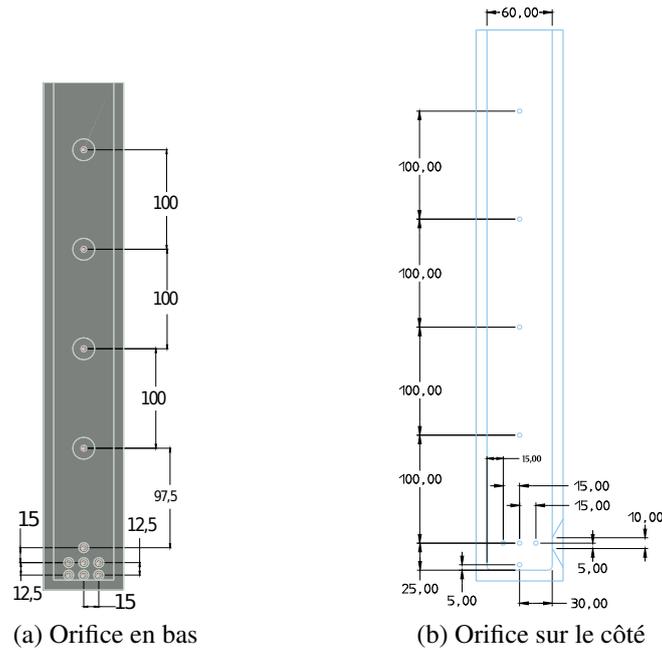


FIGURE 3.16 – Emplacement des prises de pression pour le silo rectangulaire.

sont faites sur un même axe vertical. Pour le silo cylindrique avec l’orifice latéral, les positions des prises de pression sont les mêmes. Elles sont placées sur un axe vertical situé à  $90^\circ$  à gauche de l’orifice.

Les positions des prises de pression pour le silo rectangulaire sont montrées sur la figure 3.16. L’écoulement loin de l’orifice est instrumenté par 5 prises de pression espacées de  $10\text{cm}$ , alors que celui proche de l’orifice est instrumenté de 6 capteurs rapprochés pour l’orifice inférieur et de 4 pour l’orifice latéral.

La figure 3.17a montre l’évolution temporelle de la pression à différentes positions dans le silo de diamètre  $L = 60\text{mm}$ , pour un orifice inférieur de taille  $D = 10\text{mm}$ , et des particules de diamètre  $d = 538\mu\text{m}$ . Nous pouvons observer pour chaque prise de pression un plateau suivi d’une décroissance linéaire quand le capteur se retrouve dans le réservoir d’air au dessus de la colonne de particules lors de la vidange.

Afin d’évaluer les gradients de pression au sein du silo, pour chaque plateau, nous calculons la valeur moyenne de la pression  $p_m^f$  en sélectionnant manuellement les bornes de mesure (correspondant aux lignes pointillées sur la figure). Nous ne considérons que les données dont la moyenne est effectuée sur plus de  $2s$ . Nous avons tracé ces pressions moyennes  $p_m^f$  mesurées en fonction des positions de mesures  $z$  sur la figure 3.17b. Les barres verticales et horizontales rouges représentent respectivement la dispersion des mesures de la pression et l’incertitude d’évaluation de la position du capteur de pression  $z$ . On notera que ces sources d’imprécision sont négligeables par rapport aux grandeurs mesurées. Nous pouvons voir qu’il y a un changement de pente vers le deuxième point ( $z = 1\text{cm}$ ). Nous pouvons ainsi définir sur cette courbe deux gradients de pression suivant

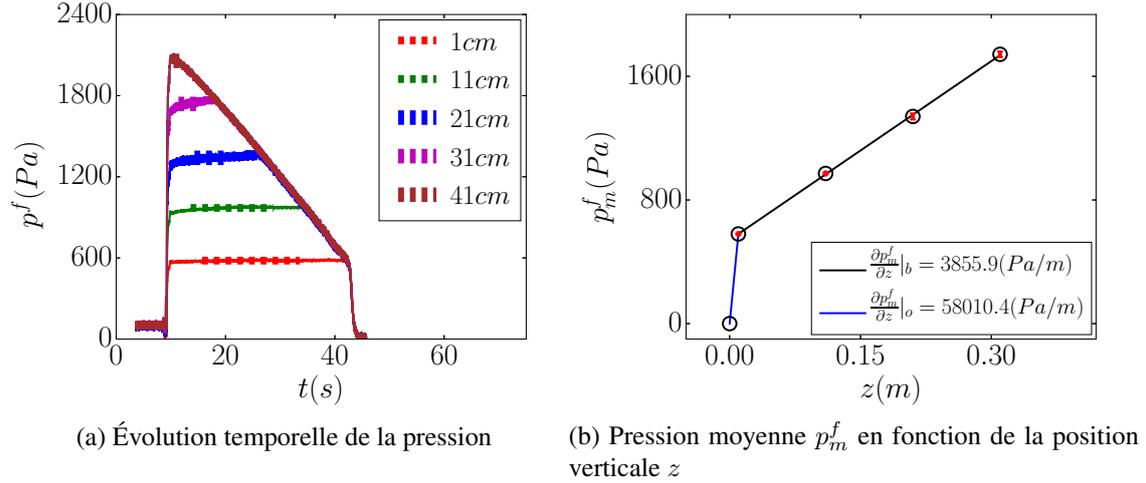


FIGURE 3.17 – Résultat typique pour le silo cylindrique ( $L = 60mm$ ,  $D = 10mm$ ,  $d = 538\mu m$ ).

$z$  :

- (i) Le gradient de pression loin de l'orifice  $\partial p_m^f / \partial z|_b$  que l'on peut estimer à partir de la pente de la courbe  $p_m^f(z)$  dans la zone suffisamment éloignée de l'orifice (en l'occurrence  $z > 1cm$ ) (voir la ligne solide en bleu sur la figure 3.17b).

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial z}|_b = \frac{d(p_m^f)}{dz}|_{z \geq 1cm} \quad (3.4)$$

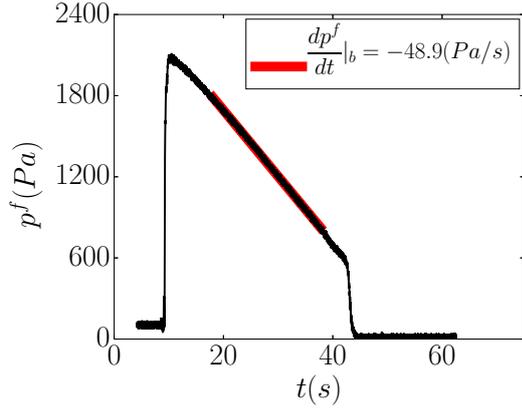
- (ii) Le gradient de pression près de l'orifice que nous estimons en utilisant le premier capteur à la position  $z_1$  (voir la ligne pointillée en bleu sur la figure 3.17b) :

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial z}|_o \approx \frac{p_m^f(z_1)}{z_1} \quad (3.5)$$

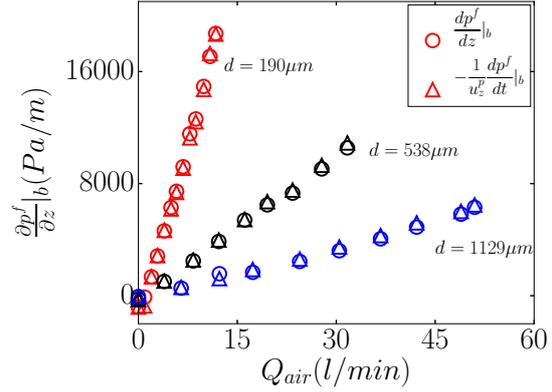
Une autre façon de mesurer le gradient de pression loin de l'orifice serait d'utiliser les mesures de pression dans le réservoir d'air  $p_h^f$  en haut du lit de particules (courbe décroissante dans la figure 3.17a). Pour cela nous pouvons utiliser le capteur situé le plus haut ( $z = 41cm$ ) et ajuster la décroissance temporelle par une droite comme montré par la ligne solide rouge sur la figure 3.18. Pour un écoulement stationnaire, si l'on note  $u_z^p$  la vitesse des particules loin de l'orifice, nous pouvons écrire (Hsiau *et coll.* [2010]) :

$$\frac{\partial p^f}{\partial z}|_b = -\frac{1}{u_z^p} \frac{dp_h^f}{dt}|_b \quad (3.6)$$

La vitesse des particules loin de l'orifice peut être évaluée en utilisant le débit des particules,  $u_z^p = \frac{Q}{\phi_b S_b}$ . La figure 3.18b compare les deux méthodes de mesure du gradient de pression loin de l'orifice, en fonction du débit d'air  $Q_{air}$  pour trois tailles de particules  $d$  différentes. Nous pouvons voir que les résultats obtenus par les deux méthodes se superposent. Mais la deuxième méthode



(a) Évolution temporelle de la pression à la position  $z = 41\text{cm}$



(b) Gradient de pression loin de l'orifice obtenu par les deux méthodes :  $\frac{dp^f}{dz}|_b$  (○) et  $-\frac{1}{u_z^p} \frac{dp^f}{dt}|_b$  (△)

FIGURE 3.18 – Cas d'un silo cylindrique ( $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$ ,  $d = 538\mu\text{m}$ ).

nécessite de mesurer trois variables : le débit de particule, la fraction volumique et l'évolution temporelle de la pression. Nous avons donc adopté la première méthode dans les études suivantes.

### 3.3 Simulations discrètes : LMGC90

#### 3.3.1 Choix du modèle

Les méthodes de simulations numériques discrètes, calculant le mouvement individuel de chaque grain, sont devenues des outils très performants pour l'étude du comportement des milieux granulaires. Elles permettent d'accéder à des grandeurs internes aux écoulements granulaires inaccessibles expérimentalement. La modélisation du mouvement des particules discrètes utilisée dépend des régimes d'écoulements considérés.

Pour les régimes d'écoulement granulaire dense d'intérêt dans notre étude, deux approches principales peuvent être utilisées : la dynamique des contacts et la dynamique moléculaire. Ces deux méthodes diffèrent dans le traitement des petites échelles de longueur et de temps impliquées dans la dynamique des milieux granulaires et dans la manière de gérer le contact entre particules. Pour la méthode de dynamique moléculaire ou de sphères molles, le mouvement de chaque grain est calculé à partir de la relation fondamentale de la dynamique et la force entre deux grains en contact à partir de leur interpénétration (Cundall et Strack [1979]). La méthode s'appuie sur un schéma temporel explicite et un traitement explicite régularisé du contact. On doit se placer à une échelle de temps suffisamment petite pour bien modéliser une collision complète et pour considérer un découplage total entre les interactions. La méthode de dynamique des contacts (CD) que nous avons utilisée, qui s'appelle aussi NSCD (Non Smooth Contact Dynamics), est basée sur le concept de sphères rigides et sur l'implémentation de la loi de Coulomb sans régularisation (Jean

et Moreau [1992], Jean [1999], Radjai et Richefeu [2009]). Elle diffère de la méthode précédente par un traitement implicite des interactions de contact et un intégrateur temporel implicite. Le contact entre deux particules est décrit par deux lois non régulières : (i) les particules sont non interpénétrables, (ii) la loi de Coulomb modélise le frottement. À chaque pas de temps, un ensemble de forces de contact vérifiant ces règles non régulières et compatibles avec les équations de la dynamique est déterminé. On peut ainsi travailler à des échelle de temps et de longueur plus grandes que celles décrivant la dynamique d’une collision, ce qui réduit le nombre d’itérations temporelles nécessaire à la résolution d’une dynamique particulière. L’avantage de cette méthode est qu’elle permet de rendre compte à la fois de collisions instantanées, de contacts de longue durée et de collisions multiples. Mais le temps de calcul nécessaire à une itération est relativement plus important que celui d’une méthode explicite. Ainsi le temps CPU nécessaire à la simulation d’une dynamique particulière reste important. Pour le milieu granulaire considéré dans notre étude qui est constitué de billes de verre rigides, la méthode NSCD est particulièrement bien adaptée et a été retenue pour simuler nos expériences.

Nous avons utilisé le logiciel libre LMGC90 (Logiciel de Mécanique Gérant le Contact, écrit en Fortran 90). Cette plate-forme logiciel utilise la méthode de dynamique des contacts (CD) et permet la modélisation de grandes collections d’objets solides (rigides/déformables) en interaction (Dubois et Jean [2006], Dubois *et coll.* [2011]). De multiples lois d’interaction intégrées dans LMGC90 rendent compte du comportement aux interfaces (contact frottant, cohésion, etc.). Le choix des lois d’interaction vise à représenter au mieux la phénoménologie. Nous avons choisi la loi de contact “*IQS – CLB*” : cette loi de contact est une loi de choc quasi inélastique couplée avec la loi de Coulomb. Cette loi, dont le seul paramètre est le coefficient de frottement, convient bien aux problèmes des collections denses de corps rigides. En supposant des matériaux différents pour les particules et les parois, nous avons choisi un coefficient de frottement interparticules  $\mu_p = 0.4$  et un coefficient de frottement entre les particules et les parois  $\mu_w = 0.5$ .

### 3.3.2 Description des systèmes étudiés

Nous avons effectué des simulations discrètes en 2D dans des configurations différentes comme montrées sur la figure 3.19 : un silo avec un orifice inférieur et des particules soit monodisperses soit bidisperse (figure 3.19a et 3.19b), et un silo avec un orifice latéral et des particules monodisperses (figure 3.19c).

Comme nous pouvons voir sur la figure 3.19 le silo consiste en un réservoir rectangulaire et de largeur  $L$ . Le lit granulaire de hauteur  $h_p$  est composé de disques de taille moyenne  $d$ . Afin d’éviter la cristallisation, une petite dispersion dans la distribution en taille des particules  $\delta d/d = 0.2$  a été introduite. Dans le cas bidisperse, les tailles moyennes des petites et des grandes particules sont respectivement  $d_f$  et  $d_c$ , avec la même dispersion sur chaque taille que dans le cas monodisperse. L’épaisseur des parois est imposée au diamètre de la particule la plus grande dans le silo ( $d_M$ ), avec

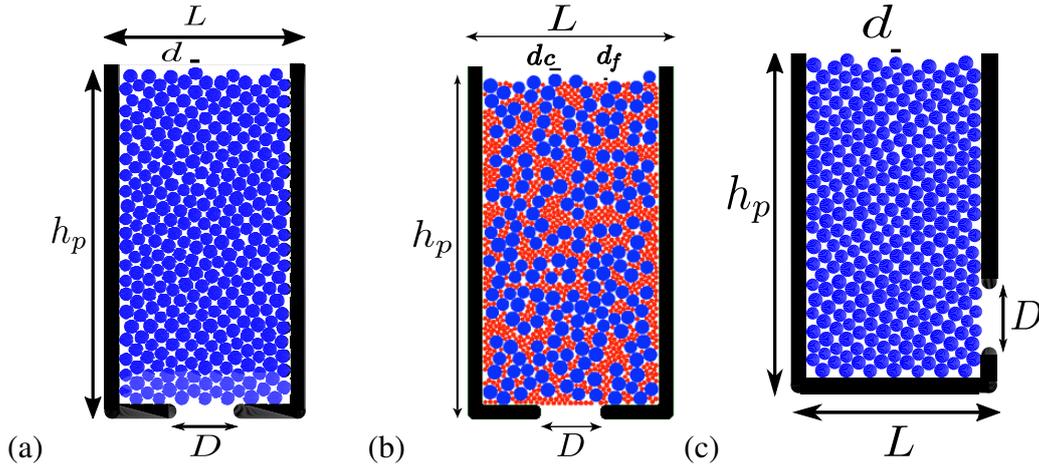


FIGURE 3.19 – Schéma des silos avec (a) un orifice inférieur et des particules monodisperses, (b) un orifice inférieur et des particules bidisperses, (c) un orifice latéral et des particules monodisperses.

une forme circulaire sur le bord de l’orifice. L’orifice, de taille  $D$ , est centré sur le fond du silo dans le cas d’un orifice inférieur, et pour le cas d’un orifice latéral, la distance entre le bas de l’orifice et le bas du silo est  $z_{bas} = 3.5d_M$ . La colonne de particules est préparée par le dépôt aléatoire des particules dans le silo avec l’orifice fermé, avec une minimisation du potentiel gravitaire.

Les simulations numériques par la méthode des éléments discrets sont naturellement coûteuses en temps de calcul. En outre, on verra dans la suite de ce chapitre, il est nécessaire de réaliser des simulations de la vidange sur des temps physiques relativement longs pour faire converger les statistiques recherchées, notamment les profils en fraction volumique pour la population de particules la moins présente. Ainsi, il est intéressant d’optimiser le coût CPU d’une simulation particulière en réduisant le nombre de particules considérées (ou de manière équivalente dans notre cas l’étendue spatiale du domaine de simulation, comme la hauteur initiale de remplissage du silo, ou la largeur  $L$  du silo). De la même manière, on peut réduire le temps de calcul en choisissant le pas de temps le plus grand possible. On s’intéresse ici à la recherche d’une valeur optimale de ces paramètres permettant de considérer que le résultat numérique est convergé, c’est à dire qu’il ne dépend que faiblement de la valeur du paramètre numérique.

### a. Condition périodique

Sachant que la simulation discrète est très coûteuse, afin de diminuer le temps de calcul, nous avons appliqué une condition périodique au domaine de calcul suivant la direction verticale afin de diminuer le nombre de particules gérées pendant le calcul : les particules éjectées hors du silo sont ré-introduites dans le domaine de calcul au sommet du silo. Dans le cas d’un orifice inférieur, la méthode est simple, il suffit d’appliquer la condition périodique aux surfaces horizontales bornant le domaine de simulation en haut du silo et en dessous de l’orifice. La distance entre le bas du domaine et le bas du silo et celle entre le haut du domaine et le haut du silo sont d’ordre  $10d_M$ .

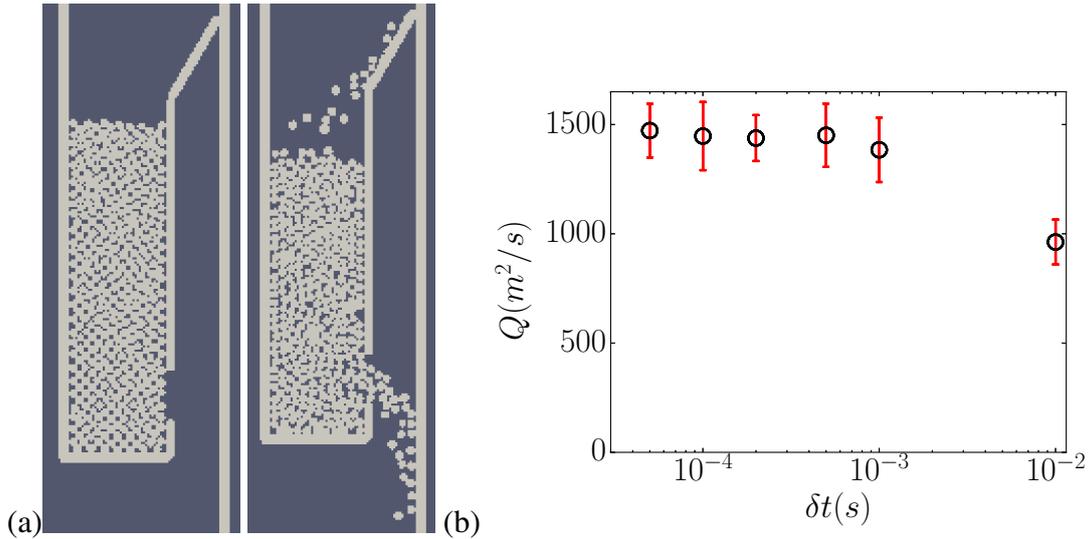


FIGURE 3.20 – (a) Schéma du silo avec un orifice latéral en condition périodique. (b) Débit moyen à la sortie du silo entre les instants  $1s$  et  $5s$  en fonction du pas de temps.

La réalisation de la condition périodique dans le cas d'un orifice latéral est un peu plus compliqué, le principe est schématisé sur la figure 3.20a. Nous avons ajouté une première paroi inclinée de  $30^\circ$  par rapport à la verticale au dessus du bord du silo contenant l'orifice, ici le bord droit. A l'extrémité droite de cette nouvelle paroi, nous avons également ajouté une paroi verticale qui a la même longueur que le domaine du calcul. Ensuite, nous avons appliqué la condition périodique aux surfaces horizontales bornant le domaine de simulation en haut du silo et en dessous de l'orifice. La distance entre le bas du domaine et le bas du silo est aussi d'ordre  $10d_M$ , et celle entre le haut du domaine et le haut du silo est d'ordre  $33d_M$  à  $70d_M$  pour dépasser le haut de la paroi inclinée. Nous pouvons voir sur la figure 3.20a que les particules qui sortent du silo sont bien ré-introduites dans le silo.

L'influence de cette condition périodique sur le débit sera discutée dans la partie suivante lorsqu'on étudie l'influence de la hauteur de la colonne granulaire.

## b. Choix du pas de temps $\delta t$

Nous avons effectué une étude de convergence des résultats numériques en fonction du pas de temps  $\delta t$  pour une vidange de silo avec un diamètre de particule  $d = 6mm$ , une taille de l'orifice  $D = 6d$ , une largeur du silo  $L = 3D$  et une hauteur du silo  $H = 10.5L$ . La figure 3.20b montre le débit moyen sur la période  $t = 1s$  à  $t = 5s$  en fonction de la valeur de  $\delta t$ . Pour les faibles pas de temps le résultat tend vers une valeur asymptotique qui est approchée avec moins de 10% d'écart lorsque le pas de temps est plus faible que  $10^{-3}s$ . Afin de réduire l'erreur induite par le pas de temps, on choisit un pas de temps  $\delta t = 5 \cdot 10^{-4}s$ . Les résultats sont enregistrés tous les deux pas de temps.

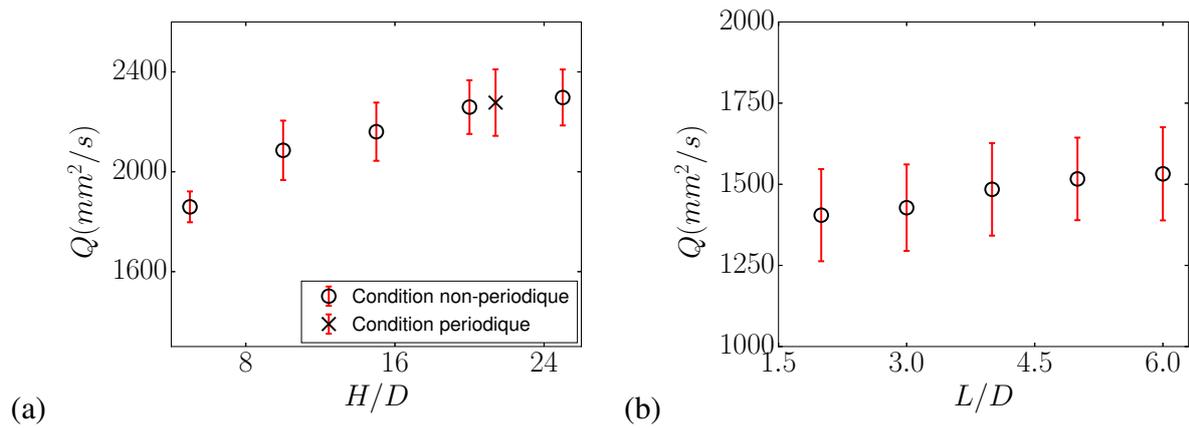


FIGURE 3.21 – Débit moyen (a) en fonction de  $H/D$  pour  $d = 2\text{mm}$  et  $D = 36\text{mm}$ , (b) en fonction de  $L/D$  pour  $d = 6\text{mm}$  et  $D = 36\text{mm}$ .

### c. Choix du ratio $H/D$ et $L/D$

Il semble généralement admis que le débit massique de la vidange de silo est indépendant de la hauteur du silo si  $H > 2D$ , et indépendant de la largeur de silo si  $L > 2D$  (Nedderman [1992]). Néanmoins, ce sont des critères issus de mesures expérimentales dans un silo tridimensionnel. On considère donc par la suite l'étude de cette dépendance pour le calcul numérique bidimensionnel.

Pour étudier l'influence de la hauteur du silo  $H$ , nous avons effectué un calcul dans un cas extrême :  $d = 2\text{mm}$  et  $D = 18d$ . En effet il est plus difficile d'atteindre un ratio  $H/D$  grand pour de petites particules et de grandes ouvertures. Nous avons choisi une même largeur  $L = 3D$  suffisamment grande pour minimiser l'influence de  $L$ . Nous avons effectué d'abord les calculs avec les conditions non-périodiques, puis un cas avec la condition périodique afin de vérifier que le résultat n'est pas influencé par l'ajout de cette condition. La figure 3.21a montre le débit des particules  $Q$  en fonction du ratio  $H/D$ . Nous pouvons voir que pour  $H/D > 20$ , l'influence de ce paramètre devient négligeable : pour une augmentation de  $H$  de 25%, le débit ne varie que de 1.8%. Les résultats sont sensiblement identiques entre les cas avec conditions aux limites périodique ou non périodique pour  $H/D > 20$ .

Nous avons ensuite effectué les calculs avec  $L/D$  variant entre 2 et 6 avec la condition périodique, nous avons conservé le ratio  $H/L = 6$  à une valeur constante. La figure 3.21b montre le débit moyen de particules en fonction de  $L/D$  pour  $d = 6\text{mm}$  et  $D = 36\text{mm}$ . Nous pouvons voir que quand on augmente  $L/D$  de 3 à 6, le débit augmente de 6.8%. L'influence de  $L/D$  n'est pas négligeable mais reste faible. Cependant si nous augmentons  $L$  d'un facteur donné, nous devons aussi augmenter  $H$  en proportion, donc le nombre de particules doit être augmenté de ce même facteur au carré. Pour conserver un temps de calcul raisonnable, nous avons choisi un ratio  $L/D = 3$  pour tous nos calculs.

### 3.3.3 Mesures effectuées

Plusieurs quantités ont été mesurées et post-traitées afin de caractériser le mouvement des particules lors de la vidange, ici nous allons présenter brièvement les grandeurs les plus importantes :

- Le débit volumique des particules
- Le profil de la vitesse  $v(x)$  près de la sortie
- Le profil de la fraction volumique  $\phi(x)$  près de la sortie

Toutes ces grandeurs sont mesurées à la sortie de l’orifice comme on peut le voir sur la figure 3.22.

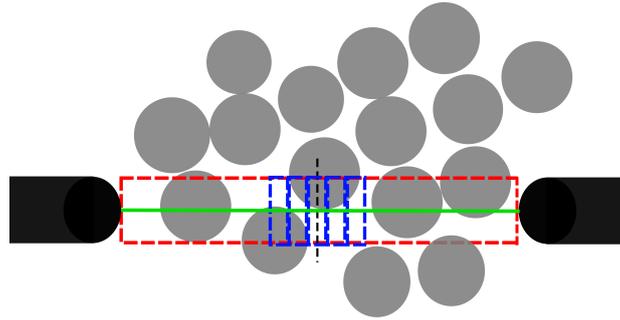


FIGURE 3.22 – Schéma des particules traversant l’orifice. La ligne verte montre où on détermine le débit de particules. La boîte rouge montre où on calcule la fraction volumique et la vitesse. La boîte bleue est centrée sur une position  $x$ , et elle montre où on détermine la fraction volumique et la vitesse à la position  $x$ .

#### a. Débit volumique des particules

Le débit volumique instantané correspond à la surface totale des particules qui sortent du silo pendant une période de temps  $\delta t = 0.1s$ ,  $Q_i = (\sum_{\delta t} S)/\delta t$ . Étant donné que la condition périodique est appliquée, nous ne pouvons pas obtenir simplement le débit en calculant la surface totale des particules à l’intérieur du silo, donc nous détectons à chaque instant les particules qui sortent de l’orifice (la ligne verte sur la figure 3.22) et sommes leurs surfaces. Le débit instantané  $Q_i$ , tracé en fonction du temps pour un cas typique sur la figure 3.23, présente un plateau correspondant à un régime stationnaire. Comme dans l’expérience, le débit moyen,  $Q$ , est obtenu en moyennant le débit instantané  $Q_i$  pendant ce régime stationnaire. L’incertitude du débit  $\sigma_Q$  est donnée par l’écart type  $\sigma_Q = \sqrt{(\sum_{k=1}^n (Q_i - Q)^2)/n}$ , où  $n$  est le nombre des points utilisés dans la moyenne.

À l’instar de Janda *et coll.* [2012], nous avons considéré les profils de fraction volumique  $\phi(x)$  et de vitesse  $v(x)$  le long de l’orifice (la boîte rouge sur la figure 3.22). La hauteur de cette boîte a été fixée à  $d_M$ . Nous avons calculé la fraction volumique moyenne pendant un temps stationnaire  $\Delta t$  proche de celui de l’obtention d’un débit moyen de vidange. En considérant que la vidange

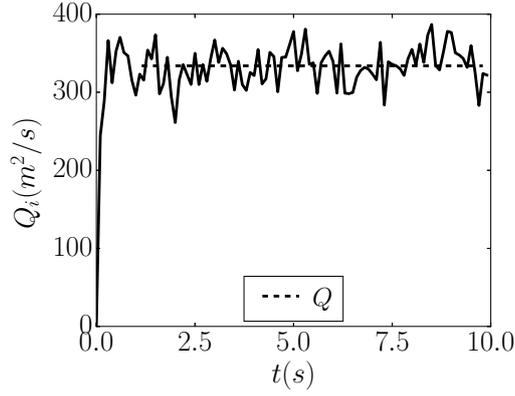


FIGURE 3.23 – Évolution temporelle du débit surfacique instantané pour un orifice inférieur en monodisperse avec  $D = 16mm$  et  $d = 2mm$ .

du silo pendant sa phase stationnaire est un processus ergodique, cette moyenne temporelle est équivalente à une moyenne d'ensemble. À chaque instant, on considère que les statistiques sont homogènes sur un domaine rectangulaire centré sur la position de mesure  $x$  (ergodicité spatiale). Ce rectangle est de longueur  $0.2\bar{d}$ , où  $\bar{d} = X_f d_f + (1 - X_f) d_c$  dans le cas bidisperse, et de largeur  $d_M$ . Il est représenté par les boîtes bleues sur la figure 3.22. Ces deux tailles étant petites devant  $D$ , la longueur caractéristique de la variation de  $\phi$  et  $v$  suivant les deux directions  $x$  et  $y$ , nous pouvons considérer que ce sous-espace est statistiquement homogène.

### b. Profil de fraction volumique sur l'orifice

Selon le théorème d'ergodicité, la valeur moyenne de fraction volumique  $\phi$  est la moyenne spatiale et temporelle de la fonction indicatrice de phase, dont la valeur est 1 quand le point observé est dans les particules, et 0 autrement. En pratique, dans une boîte rectangulaire (la boîte bleue sur la figure 3.22), nous calculons à chaque instant, la surface d'intersection entre les particules et cette boîte  $s_i$  par intégration numérique avec une précision supérieure à 1% (voir la figure 3.24). La fraction volumique moyenne est donnée par :

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^{N'_t} \left( \sum_{j=1}^{N_p} s_{i,j} \right)}{\sum_{i=1}^{N'_t} 0.2\bar{d} \cdot d_M}$$

où  $N'_t = N_t/2$  est le nombre de sauvegardes des résultats et  $N_p$  le nombre de particules intersectant à un instant  $i$  le domaine d'intégration sur une surface  $s_{i,j}$ .

Dans la suite, nous étudions théoriquement la convergence statistique de cette grandeur locale. On considère alors que les particules sont réparties de manière homogène dans la zone où on cherche à évaluer leur fraction volumique (soit l'absence de cluster). La taille d'un domaine contenant une seule particule est alors de l'ordre de  $l^2$  (carré en pointillés noirs sur le schéma de la

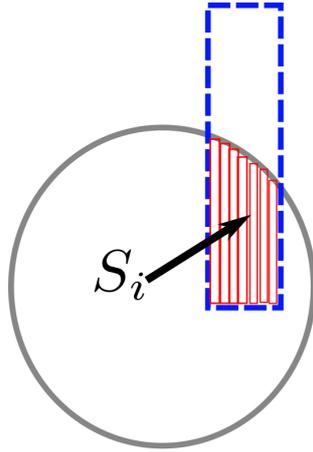


FIGURE 3.24 – Intersection d’une particule (disque) avec la fenêtre de prise de moyenne rectangulaire.

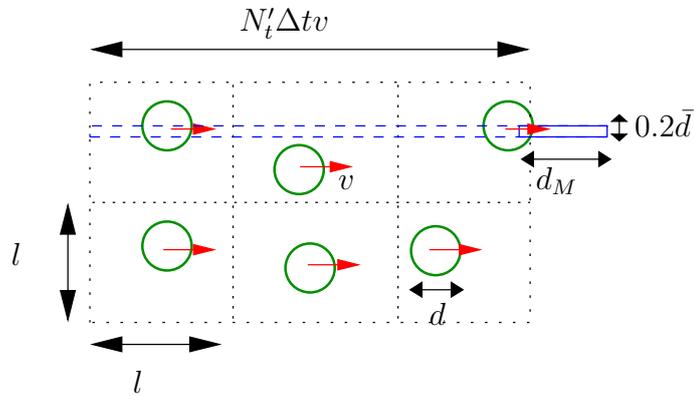


FIGURE 3.25 – Intersection d’un disque circulaire et un rectangulaire.

figure 3.25) donné par  $l^2 n = 1$  où  $n$  est le nombre de particules par  $m^2$ , soit pour notre collection de disques de taille  $d$

$$n = \frac{4\phi}{\pi d^2} \quad (3.7)$$

La fenêtre d’intégration instantanée d’extension spatiale  $0, 2\bar{d}$  (rectangle bleu sur le schéma de la figure 3.25) dans le sens normal à l’écoulement principal voit défiler les particules qui se déplacent avec une vitesse que l’on considère proche de la vitesse moyenne  $v$ . Le domaine d’intégration des statistiques est donc d’extension

$$N't \Delta t v 0, 2\bar{d} \quad (3.8)$$

où  $\Delta t$  est le pas de temps physique et  $N't$  le nombre d’itérations du calcul (rectangle en pointillés bleus). Pour avoir une bonne précision dans l’estimation de  $\phi$ , il est nécessaire que ce domaine contienne un nombre important de particules, c’est à dire qu’il soit grand devant  $l^2$ . L’erreur relative est inversement proportionnelle au nombre de domaines de taille  $l^2$  contenus dans le domaine

d'intégration, soit

$$\frac{\delta\phi}{\phi} \simeq \frac{1}{n N'_t \Delta t v_0, 2\bar{d}} \quad (3.9)$$

ainsi,

$$\frac{\delta\phi}{\phi} \simeq \frac{\pi d^2}{4\phi N'_t \Delta t v_0, 2\bar{d}} \quad (3.10)$$

On peut ainsi estimer le nombre d'itération  $N_t$  pour avoir une estimation à la précision relative donnée d'une valeur de  $\phi$  estimée.

La vitesse au centre de l'orifice est de l'ordre de  $v = \sqrt{gD}$  et la fraction volumique  $y$  est supérieure à 0.4. Ainsi pour une collection de disques de taille  $\bar{d} = d = 6mm$  s'écoulant au travers d'un orifice de taille  $D = 36mm$ , on estime qu'il faut un nombre d'itérations de l'ordre de 4000 pour avoir une précision relative de 5%. Il s'agit ici d'un cas relativement favorable.

À l'extrême opposé, si on considère un mélange bidisperse composé majoritairement ( $X_f = 0.825$ ) de petites particules  $d_f = 2mm$ , soit  $\bar{d} \simeq d_f$  et que l'on cherche à estimer la fraction volumique des grosses particules,  $d = 6mm$  dans une zone proche du bord de l'orifice de taille  $36mm$  où la vitesse vaut environ 30% de la vitesse au centre  $v = \sqrt{gD}$  et où la fraction volumique vaut 40% de la valeur au centre (environ 0.7 pour le mélange) soit  $\phi_c \simeq X_f * 0.4 * 0.7 = 0.035$ , il faut alors de l'ordre de 450000 itérations pour obtenir le résultat avec une précision de l'ordre de 5%. Ceci expliquera que les profils de fraction volumique en sortie de l'orifice pour les populations de particules les moins nombreuses dans un mélange bidisperse soient relativement bruités (voir les résultats du chapitre 4).

### c. Profil de la vitesse près de la sortie

Le profil de la vitesse à la sortie d'une population de particules est obtenu sous forme de la moyenne d'ensemble (sur le même échantillon) de la vitesse des particules individuelles pondérées par la surface d'intersection,  $s_i$ , entre les particules et le domaine d'intégration (la boîte bleue sur la figure 3.22). La vitesse est par conséquent la moyenne en temps et en espace du produit de la fonction indicatrice de phase et la vitesse individuelle divisé par  $\phi$ . De la même manière que pour le calcul de  $\phi$ , nous calculons à chaque instant, la surface d'intersection entre une particule et le domaine d'intégration, nous relevons la vitesse de cette particule  $v_i$  et la vitesse moyenne est donnée par :

$$v = \frac{\sum_{i=1}^{N'_t} \left( \sum_{j=1}^{N_p} s_j v_j \right)}{\sum_{i=1}^{N'_t} \left( \sum_{j=1}^{N_p} s_j \right)}$$

Pour l'écoulement granulaire considéré, la dispersion statistique en vitesse a été observée comme relativement faible. Ainsi, la convergence statistique du profil de vitesse locale est obtenue pour un temps physique de vidange relativement proche de celui de l'obtention d'un débit

moyen de vidange. La convergence étant plus rapide que pour  $\phi$ , c'est le calcul de cette dernière grandeur qui fixe le temps de calcul.

### 3.3.4 Conclusion

Les simulations sont effectuées sur différentes machines selon la durée totale de la simulation. Étant donné que la condition périodique a été appliquée, nous avons décidé le temps de calcul en regardant la convergence des grandeurs moyennes vers une valeur stationnaire dont le critère le plus sévère est donné par la fraction volumique locale. Le temps de calcul varie de quelques heures à quelques jours. Les simulations relativement courtes qui durent moins qu'un jour, sont effectuées avec un seul cœur d'un iMac 3.5GHz Core i7. Les simulations plus longues ont été faites sur les clusters de l'IUSTI sur 12 ou 16 cœurs. Les paramètres que nous avons choisis et faits varier seront détaillés le moment opportun dans les chapitres suivants.

## 3.4 Simulations continues : *Gerris* et *Basilisk*

### 3.4.1 Choix du modèle

Suite au travail de [Staron et coll. \[2012, 2014\]](#), nous avons simulé la vidange de silo en implémentant la rhéologie  $\mu(I)$  que nous avons présentée dans le chapitre 2 dans un logiciel libre qui résout des équations aux dérivées partielles décrivant l'écoulement d'un fluide : *Gerris* et sa nouvelle version *Basilisk* qui est en cours de développement (voir [Popinet \[2015\]](#) pour plus de détails sur *Basilisk*). Ces deux versions utilisent la méthode des volumes finis et résolvent les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement pour deux phases, en l'occurrence une phase représentant le milieu granulaire et une phase gazeuse au sein des porosités de ce milieu. Une méthode de type "volume de fluide" est utilisée pour déterminer la position de l'interface entre le milieu granulaire et le milieu libre. Le codage du logiciel *Basilisk* correspond à une optimisation de celui du logiciel *Gerris* permettant notamment un gain de performance numérique dans la résolution des équations de bilan de quantité de mouvement multi-dimensionnelles.

Nous avons effectué des simulations de vidange de silo en 2D avec un orifice inférieur ou un orifice latéral comme montré sur la figure 3.26. Le silo consiste en un réservoir rectangulaire de largeur  $L$  et de hauteur  $H$ . Les particules sont considérées comme un milieu continu de hauteur  $h_p$  représenté en jaune sur la figure. L'orifice, de taille  $D$ , est centré au fond du silo pour le cas inférieur et pour le cas latéral, la distance entre le bas de l'orifice et le bas du silo est  $z_{bas} = 0.1L$ .

Nous avons d'abord effectué la simulation d'une vidange de silo avec un orifice inférieur avec les deux logiciels *Gerris* et *Basilisk*. Les résultats étant quasiment identiques, tous les calculs ont ensuite été effectués avec *Basilisk*. Nous avons d'abord simulé la vidange en étudiant l'effet de la position de l'orifice ainsi que celui de la largeur du silo, puis nous avons simulé l'effet d'une

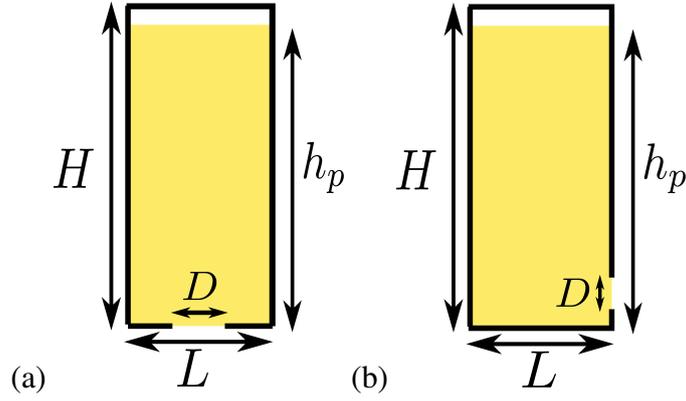


FIGURE 3.26 – Schéma des silos utilisés dans *Basilisk* pour (a) un orifice inférieur, (b) un orifice latéral.

injection de gaz. Dans ce chapitre nous détaillerons les spécificités de ces deux études.

### 3.4.2 Vidange de silo avec effet de la géométrie du silo

#### a. Équations résolues

Les équations de Navier Stokes dans leur formulation incompressible résolues par le solveur *Basilisk* sont :

$$\frac{\partial u_i^p}{\partial x_i} = 0, \quad (3.11)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i^p}{\partial t} + u_j^p \frac{\partial u_i^p}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial \sigma_{ij}^p}{\partial x_j} + \rho g_i + f_{wi}, \quad (3.12)$$

où  $f_{wi}$  est un terme source. En suivant [Jop et coll. \[2006\]](#), on modélise le milieu granulaire comme un fluide visco-plastique avec une viscosité effective  $\eta_{eff}$  dépendant du taux de déformation, de la pression locale et d'un coefficient de friction effectif :

$$\sigma_{ij}^p = -p^p \delta_{ij} + \eta_{eff} \dot{\gamma}_{ij} \quad \text{avec} \quad \eta_{eff} = \frac{\mu(I) p^p}{|\dot{\gamma}|}, \quad (3.13)$$

$$I = \frac{\dot{\gamma} d}{\sqrt{p^p / \rho_p}}, \quad \text{et} \quad \mu(I) = \mu_s + \frac{(\mu_2 - \mu_s)}{I_0 / I + 1}, \quad (3.14)$$

avec  $\dot{\gamma}_{ij} = \partial u_i^p / \partial x_j + \partial u_j^p / \partial x_i$  et  $|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$ . Dans ces simulations nous ne considérerons pas la variation de la fraction volumique en fonction de  $I$  donnée par l'équation 2.5 dans le chapitre 2, la masse volumique du milieu granulaire correspond donc à  $\rho = \phi \rho_p$  où  $\phi$  est une constante.

Une limite de cette formulation est due à la divergence de la viscosité effective à faible taux de déformation. Nous avons utilisé une technique de régularisation qui consiste à remplacer  $\eta_{eff}$  par  $\min(\eta_{eff}, \eta_{eff}^{max})$  où  $\eta_{eff}^{max} = 100$  est une constante suffisamment large. Cette technique a été utilisée avec succès par [Lagrée et coll. \[2011\]](#) pour simuler des effondrements de colonnes

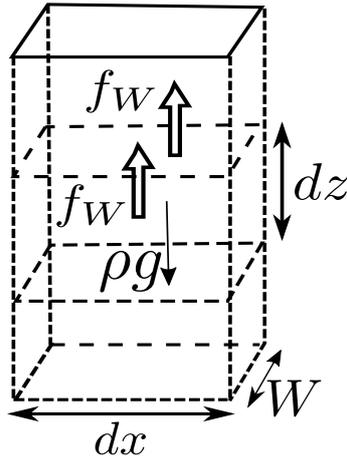


FIGURE 3.27 – Schéma du bilan de force sur une tranche de granulaire au sein du silo.

granulaires et par [Staron et coll. \[2012, 2014\]](#) pour des vidanges de silos. Des précisions sur la méthode numérique peuvent être trouvées dans ces références. Notons que nous simulons alors le milieu granulaire quasi statique comme un fluide très visqueux. En suivant ces auteurs nous avons choisi  $\mu_s = 0.4$ ,  $\Delta\mu = 0.28$ ,  $I_0 = 0.4$  comme paramètres rhéologiques.

Nous avons réalisé une série de simulations dans le cas 2D et quelques tests en 3D en imposant  $f_{wi} = 0$ . Puis, afin de prendre en compte la friction sur les parois antérieures et postérieures, éloignées d'une distance  $W$ , d'un silo tri-dimensionnel dans le cadre d'une simulation bi-dimensionnelle, nous avons ajouté une force de friction  $f_{wi}$  en tant que terme source dans les équations 3.12 de conservation de la quantité de mouvement :

$$f_{wi} = -2(\mu_w p^p / W)(u_i / |u_i|) \quad (3.15)$$

Les équations résolues correspondent alors à des équations moyennées dans l'épaisseur  $W$  du silo (voir figure 3.27), comme pour l'écoulement dans une cellule de Hele-Shaw ([Jop et coll. \[2005\]](#), [Lagrée \[2007\]](#)). Dans cette simulation que nous pouvons qualifier de pseudo 3D, les différents champs (vitesses, pression, ...) résolus correspondent à leur valeur moyenne dans l'épaisseur du silo.

Dans la suite de cette étude, nous avons fixé la valeur  $\mu_w = 0.1$  et fait varier la pseudo épaisseur  $W$ . Toutefois quand le terme source représentant la friction aux parois  $f_{wi}$  devient trop important, la simulation ne converge plus vers une solution stable. La méthode numérique implémentée n'est pas prévue pour un terme aussi grand. Cependant, la gamme de variation de  $W$  couverte est suffisamment large pour comparer qualitativement les résultats des simulations à ceux des expériences.

## b. Conditions aux limites

La figure 3.28 montre le domaine de calcul dans les deux configurations pour l'orifice, inférieur et latéral. Nous imposons des conditions aux limites sur tous les bords du domaine, pour la pression

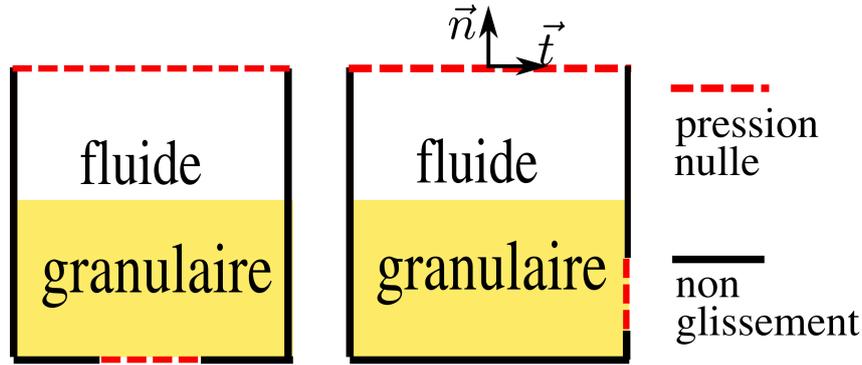


FIGURE 3.28 – Schéma du domaine de calcul dans les deux configurations pour l’orifice, inférieur et latéral. Pour les bords du domaine de calcul, les lignes noires montrent les parois où on impose une condition non-glissement, et les lignes pointillées rouges montrent les zones ouvertes où on impose une pression nulle.

granulaire  $p^p$  et pour la vitesse du milieu granulaire  $u^p$ . Les bords du domaine de calcul sont représentés par les lignes noires pour les parois et par les lignes pointillées rouges pour les zones ouvertes.

En haut du domaine et à la sortie du silo (lignes pointillées rouges), sur les faces de bord de normale  $\vec{n}$ , nous imposons une condition de Dirichlet pour la pression  $p^p = 0$  et une condition de Neumann pour les composantes normales, resp. tangentielles, de la vitesse, soit  $\nabla \cdot (\vec{u}^p \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} = 0$ , resp.  $\nabla \cdot (\vec{u}^p \cdot \vec{t}) \cdot \vec{n} = 0$ .

Sur les parois (lignes noires) nous appliquons une condition de Neumann pour la pression  $\nabla p^p \cdot \vec{n} = 0$ , une condition de non pénétration pour la vitesse normale  $\vec{u}^p \cdot \vec{n} = 0$  ainsi qu’une condition de non-glissement pour la vitesse tangentielle  $\vec{u}^p \cdot \vec{t} = 0$

Cette condition de non-glissement à la paroi n’est pas réaliste vis à vis de nos expériences, où nous pouvons observer que les particules glissent sur les parois lors de la vidange. Une condition plus réaliste serait donc d’imposer une condition de glissement avec un coefficient de friction paroi/milieu granulaire donné. Cependant ce type de condition aux limites n’est pas encore implémenté dans le code.

Néanmoins, nous avons étudié l’influence de cette condition de non-glissement par rapport à une condition de glissement libre, pour laquelle nous imposons une condition de Neumann sur la vitesse tangentielle  $\nabla \cdot (\vec{u}^p \cdot \vec{t}) \cdot \vec{n} = 0$ . Nous avons mené cette étude avec le logiciel *Gerris* et le résultat est représenté sur la figure 3.29 où nous avons tracé le débit normalisé  $Q/\sqrt{gL}$  en fonction de la taille de l’ouverture  $D/L$  pour les deux conditions aux limites et les deux positions de l’ouverture.

Comme *Staron et coll.* [2014], nous avons trouvé que cette condition aux limites n’influence pas le débit dans le cas d’un orifice inférieur. Par contre, pour un orifice latéral (figure 3.29b), nous observons que la condition de non-glissement prédit des débits plus faibles que la condition de glissement. Il semble toutefois que la loi de variation de  $Q$  en fonction de  $D/L$  reste la même

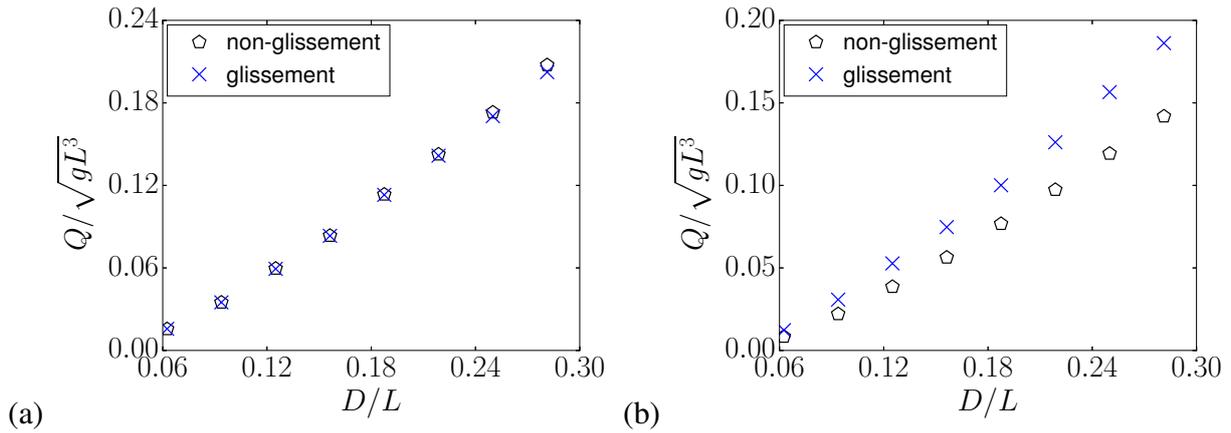


FIGURE 3.29 – Le débit normalisé  $Q/\sqrt{gL^3}$  en fonction du  $D/L$  pour  $L = 90d$  et  $h_p = 1.92L$  avec des conditions aux limites différentes (a) dans un cas d’un orifice inférieur (b) dans un cas d’un orifice latéral.

et que cette influence concerne uniquement l’amplitude. Aucune de ces deux représentations n’est satisfaisante pour décrire le mouvement des particules le long d’une paroi, et par souci de simplicité nous avons finalement opté pour la condition aux limites de non-glissement le long des bords du domaine représentant des parois. L’étude de cette condition aux limites reste un sujet ouvert dans la littérature concernant les modélisations moyennées d’écoulements de particules. Suivant les cas (dilués ou denses), plusieurs formulations ont pu être proposées, comme il est mentionné dans un article consacré à l’influence de cette condition dans une simulation de lits fluidisés par [Fede et coll. \[2016\]](#).

### c. Mesures effectués

Le post-traitement pour la simulation continue est beaucoup plus simple que celui de la simulation discrete, car nous avons accès directement à chaque champ, en temps et en espace, sans devoir effectuer de moyenne.

Le suivi de l’interface étant implémenté dans *Gerris* et *Basilisk*, nous connaissons à chaque instant le volume  $V$  de fluide granulaire dans le silo. Ainsi nous avons calculé le débit instantané avec la même méthode que dans l’expérience,

$$Q_i(t) = [V(t) - V(t + \delta t)] / \delta t$$

ce qui correspond au volume total de fluide granulaire qui sort du silo pendant une durée que nous imposons  $\delta t = 0.1\sqrt{L/g}$ . L’évolution temporelle du débit volumique instantané normalisé  $Q_i/(\sqrt{gL^3})$  pour un cas avec un orifice inférieur est tracée sur la figure 3.30. Nous pouvons voir que le débit instantané est bien stationnaire pendant la vidange. Le débit moyen,  $Q$ , est obtenu en moyennant le débit instantané  $Q_i$  pendant ce régime stationnaire (voir la ligne pointillée rouge sur la figure).

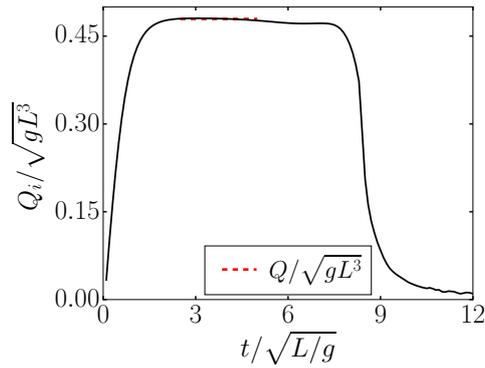


FIGURE 3.30 – Résultat obtenu avec la simulation continue 2D : évolution du débit volumique instantané normalisé  $Q_i/(\sqrt{gL^3})$  en fonction du temps  $t/\sqrt{L/g}$  pour un orifice inférieur avec  $L = 90d$ ,  $D = 0.5L$  et  $h_p = 3.9L$ . La ligne pointillée représente le débit moyen  $Q/(\sqrt{gL^3})$ .

### 3.4.3 Choix des paramètres

Afin de choisir les paramètres de la simulation, nous les avons fait varier de manière indépendante. Cette section présente brièvement les résultats de cette étude paramétrique.

#### a. Nombre de mailles

Dans le cas d'un silo avec orifice inférieur, nous avons fait une étude systématique de l'influence du nombre de mailles,  $N$ , sur la largeur du silo,  $L$  en mesurant le débit de vidange en fonction de la taille de l'orifice dans une configuration donnée ( $L = 90d$ ,  $h_p = 0.96L$ ) pour 3 densités de maillage.

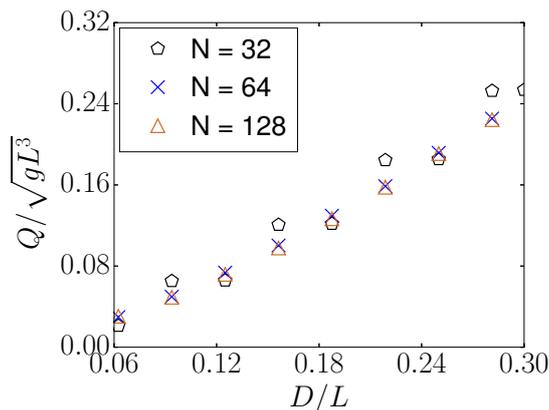


FIGURE 3.31 – Orifice inférieur avec  $L = 90d$  et  $h_p = 0.96L$  : Débit moyen normalisé  $Q/\sqrt{gL^3}$  en fonction de  $D/L$  pour 3 maillages.

Nous pouvons voir sur la figure 3.31, que les résultats se superposent pour  $N = 64$  et  $N = 128$ , tandis qu'un écart irrégulier et non négligeable est constaté pour le cas du maillage le plus lâche,  $N = 32$ . Cette étude suggère l'utilisation de  $N = 64$ . Nous avons vérifié sur un cas de vidange de silo avec orifice latéral ( $L = 90d$ ,  $h_p = 1.92L$  et  $D = 0.3125L$ ) que ce choix est suffisant.

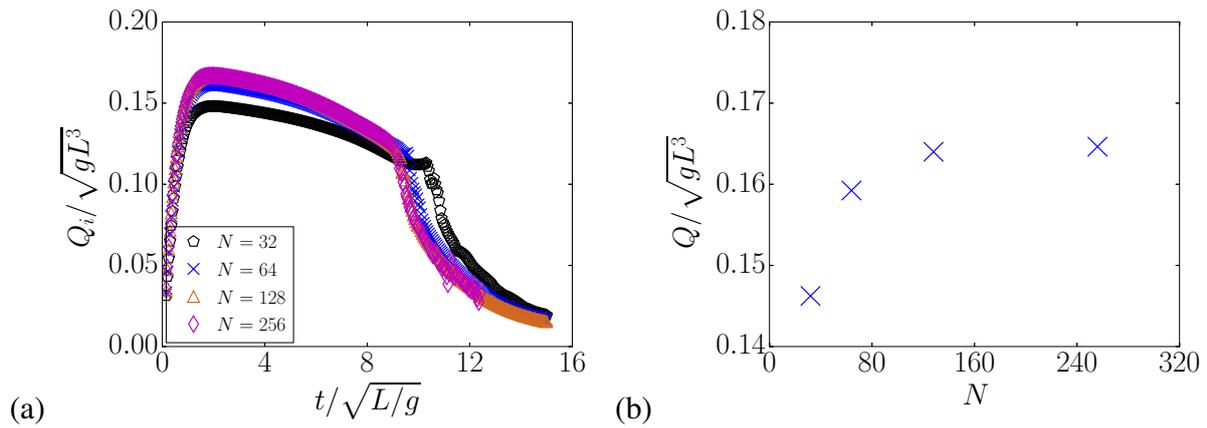


FIGURE 3.32 – Orifice latéral avec  $L = 90d$ ,  $h_p = 1.92L$  et  $D = 0.3125L$  : (a) Évolution temporelle du débit instantané  $Q_i / \sqrt{gL^3}$  pour 4 maillages. (b) Débit moyen  $Q / \sqrt{gL^3}$  en fonction du nombre de maille.

La figure 3.32 représente l'évolution temporelle du débit ainsi que le débit moyen pour 4 maillages différents. Nous pouvons voir qu'en choisissant  $N = 64$  le débit moyen a moins de 5% d'écart avec les valeurs (proches entre elles) obtenues pour des maillages plus denses, ce qui nous conforte dans ce choix.

### b. Influence de la hauteur initiale du milieu granulaire

De la même façon, nous avons testé l'influence de la hauteur initiale du milieu granulaire, en étudiant la vidange de silo avec le diamètre de l'orifice le plus grand utilisé. Les figures 3.33 et 3.34 représentent, respectivement pour l'orifice inférieur et l'orifice latéral, l'évolution temporelle du débit ainsi que le débit moyen pour 4 hauteurs différentes. Nous pouvons voir que le remplissage initial ne joue plus de rôle pour  $h_p > 2L$  (resp.  $h_p > 3L$ ) pour l'orifice inférieur (resp. l'orifice latéral). Nous avons donc choisi de travailler avec le remplissage initial  $h_p = 3.9L$  et la hauteur du silo (domaine de calcul)  $H = 4L$  pour ces deux configurations.

### c. Influence de la largeur du silo

Enfin, nous avons testé l'influence de la largeur du silo pour les deux positions de l'orifice (figures 3.35 et 3.36). Nous pouvons voir que dans la gamme testée ce paramètre a très peu d'influence sur le débit. Nous avons donc choisi la largeur du silo  $L = 90d$  pour l'ensemble de nos études.

## 3.4.4 Vidange de silo avec une injection d'air

### a. Équations résolues

Dans l'étude du cas sec, la phase gazeuse environnante est considérée comme passive. Pour simuler la vidange de silo avec une injection d'air nous considérons les équations à deux phases

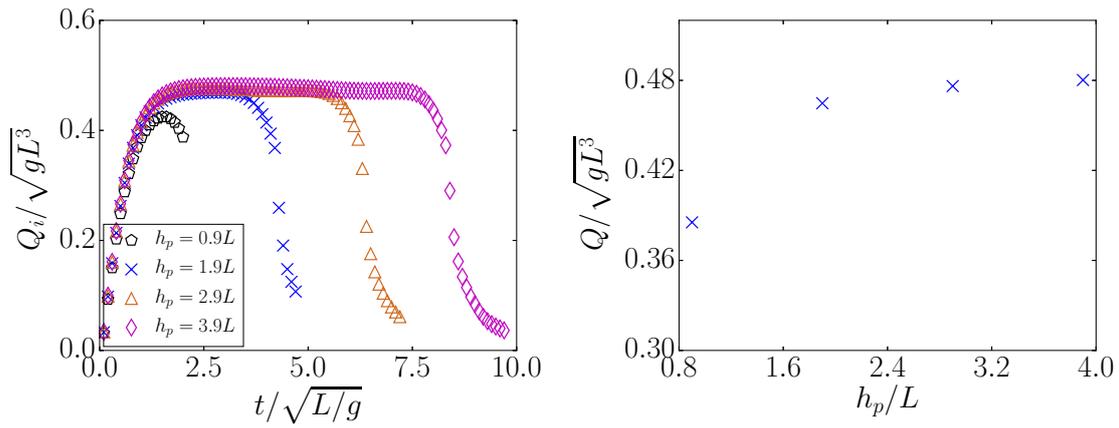


FIGURE 3.33 – Orifice inférieur avec  $L = 90d$ ,  $D = 0.5L$  : (a) Évolution temporelle du débit instantané  $Q_i / \sqrt{gL^3}$  pour 4 hauteurs de particules  $h_p$ . (b) Débit moyen  $Q / \sqrt{gL^3}$  en fonction de  $h_p/L$ .

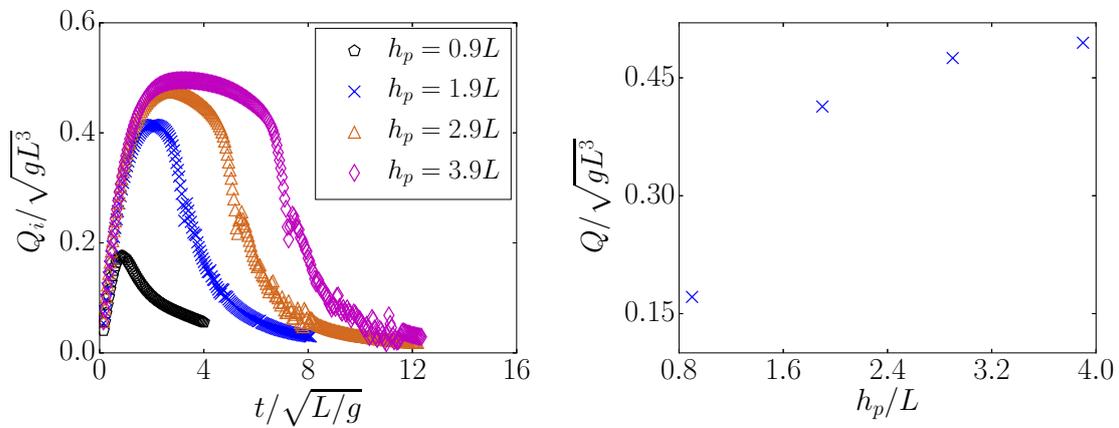


FIGURE 3.34 – Orifice latéral avec  $L = 90d$ ,  $D = 0.75L$  : (a) Évolution temporelle du débit instantané  $Q_i / \sqrt{gL^3}$  pour 4 hauteurs de particules  $h_p$ . (b) Débit moyen  $Q / \sqrt{gL^3}$  en fonction de  $h_p/L$ .

qui seront discutées au chapitre 6. Dans ces équations, les termes instationnaire et d'advection de la quantité de mouvement du fluide ainsi que sa pesanteur sont négligés. Comme précédemment, nous supposons la fraction volumique du milieu granulaire constante. Enfin nous nous limitons à l'étude du régime laminaire visqueux et nous utilisons l'équation de Darcy pour modéliser la force de trainée. Selon ces hypothèses, les équations de Navier Stokes dans leur formulation incompres-

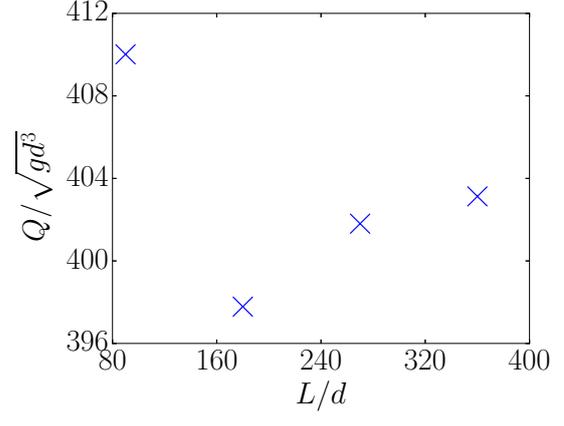
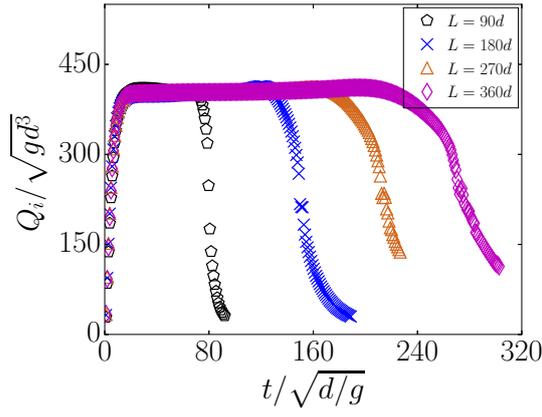


FIGURE 3.35 – Orifice inférieur avec  $H = 351d$ ,  $D = 67.5d$  : (a) Évolution temporelle du débit instantané  $Q_i/\sqrt{gL^3}$  pour 4 largeurs du silo  $L$ . (b) Débit moyen  $Q/\sqrt{gL^3}$  en fonction de  $L/d$ .

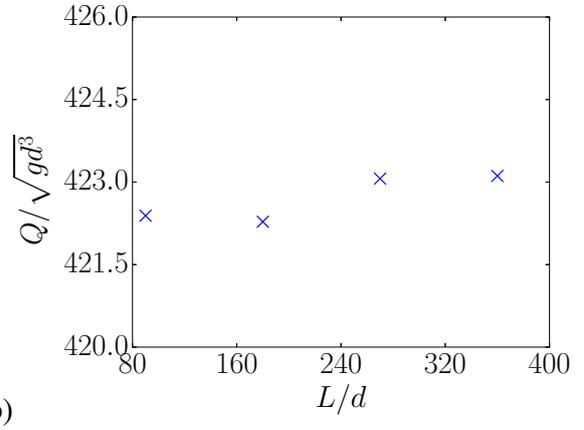
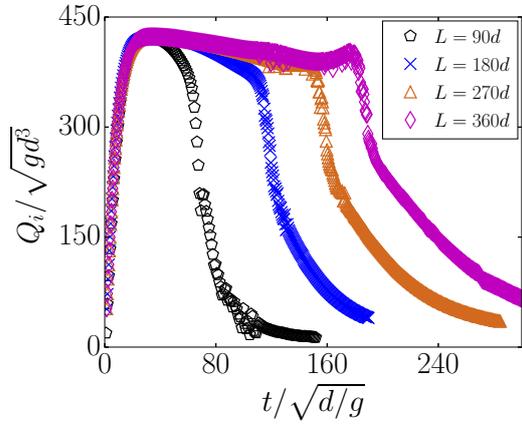


FIGURE 3.36 – Orifice latéral avec  $H = 351d$ ,  $D = 45d$  : (a) Évolution temporelle du débit instantané  $Q_i/\sqrt{gL^3}$  pour 4 largeurs du silo  $L$ . (b) Débit moyen  $Q/\sqrt{gL^3}$  en fonction de  $L/d$ .

sible résolues dans le solveur *Basilisk* sont maintenant :

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial u_x^p}{\partial x} + \frac{\partial u_z^p}{\partial z} = 0 \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial p^f}{\partial x} + \beta_l \eta (U_x - u_x^p) = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial p^f}{\partial z} + \beta_l \eta (U_z - u_z^p) = 0 \quad (3.19)$$

$$-\rho \left[ \frac{\partial (u_x^p)}{\partial t} + u_x^p \frac{\partial u_x^p}{\partial x} + u_z^p \frac{\partial u_x^p}{\partial z} \right] + \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial z} - \frac{\partial p^f}{\partial x} = 0 \quad (3.20)$$

$$-\rho \left[ \frac{\partial (u_z^p)}{\partial t} + u_x^p \frac{\partial u_z^p}{\partial x} + u_z^p \frac{\partial u_z^p}{\partial z} \right] + \frac{\partial \sigma_{zx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^p}{\partial z} - \frac{\partial p^f}{\partial z} - \rho g = 0 \quad (3.21)$$

Les équations 3.18 et 3.19, s'écrivent  $\alpha \nabla p^f = -(\vec{U} - \vec{u}^p)$ , où l'on note  $\alpha = 1/(\eta \beta_l)$  le ratio entre la perméabilité du milieu granulaire et la viscosité du fluide. En utilisant la conservation de la masse (équations 3.16 et 3.17) qui correspond à  $\nabla \cdot \vec{U} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$ , et en prenant la divergence

des équations de bilan de quantité de mouvement fluide, il vient alors

$$\nabla \cdot (\alpha \nabla p^f) = 0 \quad (3.22)$$

Il s'agit d'une équation de Poisson–Helmholtz que nous pouvons résoudre dans *Basilisk* à l'aide du solveur (<http://basilisk.fr/src/poisson.h#multigrid-poissonhelmholtz-solvers>). Dans cette équation  $\alpha$  peut dépendre du temps et de l'espace. Ainsi, pour un point de l'espace ne contenant pas de milieu granulaire, on considère un milieu très perméable ( $\alpha_\infty \gg 1$ ) et, a contrario, en présence du milieu granulaire on impose une perméabilité :

$$\alpha = \frac{1}{\eta\beta_l} \quad \text{pour} \quad z \leq h_p \quad (3.23)$$

$$\alpha = \alpha_\infty \quad \text{pour} \quad z > h_p \quad (3.24)$$

La résolution de l'équation 3.22 nous permet d'obtenir le champ de pression fluide  $p^f$  et donc ses gradients. Ces derniers correspondent alors aux termes de couplage fluide-grains dans les équations bilan de quantité de mouvement de la phase solide 3.20 et 3.21.

## b. Conditions aux limites

Les conditions aux limites pour la pression granulaire  $p^p$  et la vitesse granulaire  $u^p$  restent les mêmes que dans le cas sans effet d'air. Pour résoudre l'équation 3.22, il faut donner des conditions aux limites pour  $p^f$  aux bords du domaine (figure 3.28). De la même manière que pour la pression granulaire nous appliquons une condition de Dirichlet à l'orifice  $p^f = 0$ , et une condition de Neumann sur les parois  $\vec{\nabla} p^f \cdot \vec{n} = 0$ . La différence provient du fait que nous devons imposer une condition sur la pression en haut du domaine qui simule l'injection d'air à débit constant.

Loin de l'orifice, par exemple en  $z = h_p$ , l'écoulement du fluide et du milieu granulaire peuvent être considéré uniforme avec  $U_z(h_p) = Q_{air}/L$  et  $u_z^p(h_p) = Q/L$ . D'après l'équation 3.19, le gradient de pression en haut de la colonne granulaire s'écrit alors

$$\frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_{h_p} = -\frac{\eta\beta_l}{L} (Q_{air} - Q)$$

D'après le théorème de flux-divergence et l'équation 3.22, on a  $\oint_{\partial\Omega} \alpha \vec{\nabla} p^f d\vec{s} = 0$  soit, en utilisant les équations 3.23 et 3.24 et les conditions aux limites sur les parois :

$$\alpha_\infty \frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_H = \frac{1}{\eta\beta_l} \frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_{h_p}$$

Nous obtenons alors la condition à appliquer en haut du domaine :

$$\frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_{z=H} = -\frac{1}{\alpha_\infty L} (Q_{air} - Q) \quad (3.25)$$

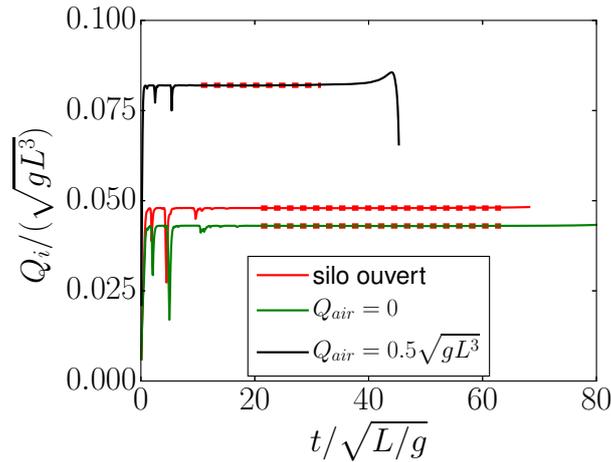


FIGURE 3.37 – Simulation numérique d’une vidange de silo dans d’un cas d’un orifice inférieur avec écoulement d’air par *Basilisk*: Le débit instantané  $Q_i/\sqrt{gL^3}$  en fonction du temps  $t/\sqrt{L/g}$  pour orifice  $D = 0.125L$ .

Ainsi, nous avons bien simulé une injection d’air avec un débit d’air imposé dans un silo fermé. Cette condition aux limites couple également les deux phases. Concrètement, cette condition aux limites dépend du débit du granulaire  $Q_i$  qui est calculé à chaque pas de temps afin d’actualiser la condition aux limites fluide en haut du domaine 3.25.

### c. Mesures effectués

Comme précédemment nous avons accès directement à chaque champs, en temps et en espace. La figure 3.37 montre le débit instantané au cours du temps pour un cas typique avec 3 conditions d’injection d’air équivalent respectivement à un silo ouvert (courbe rouge), un silo bouché (courbe verte) et une injection d’air dans le silo bouché (courbe noire). Nous pouvons voir que dans tous les cas le débit n’est pas stable aux premiers instants du calcul. Ceci est principalement dû au fait que le résultat converge difficilement pour des grandes valeurs de  $H/L$  et des petites valeurs de  $D/L$ . Le régime stationnaire est ensuite atteint, et nous mesurons les valeurs moyennes (lignes pointillées). Notre simulation reproduit bien le fait qu’un silo fermé se vidange moins vite qu’un silo ouvert et qu’un injection d’air assiste significativement la vidange.

La figure 3.38 présente l’évolution temporelle de la pression fluide et de son gradient vertical à plusieurs positions sur la ligne de courant centrale pour 2 débits d’injection d’air. Nous reproduisons bien les observations expérimentales qui seront détaillées aux chapitres 6 et 7. Par exemple nous observons une dépression, correspondant à un contre-courant pour  $Q_{air} = 0$  et une surpression correspondant à un co-écoulement pour  $Q_{air} = 0.5\sqrt{gL^3}$ . De plus nous observons que le gradient de pression est plus fort proche de la sortie que loin de la sortie. Dans la suite, pour étudier ces quantités nous utiliserons une mesure ponctuelle dans le régime stationnaire.

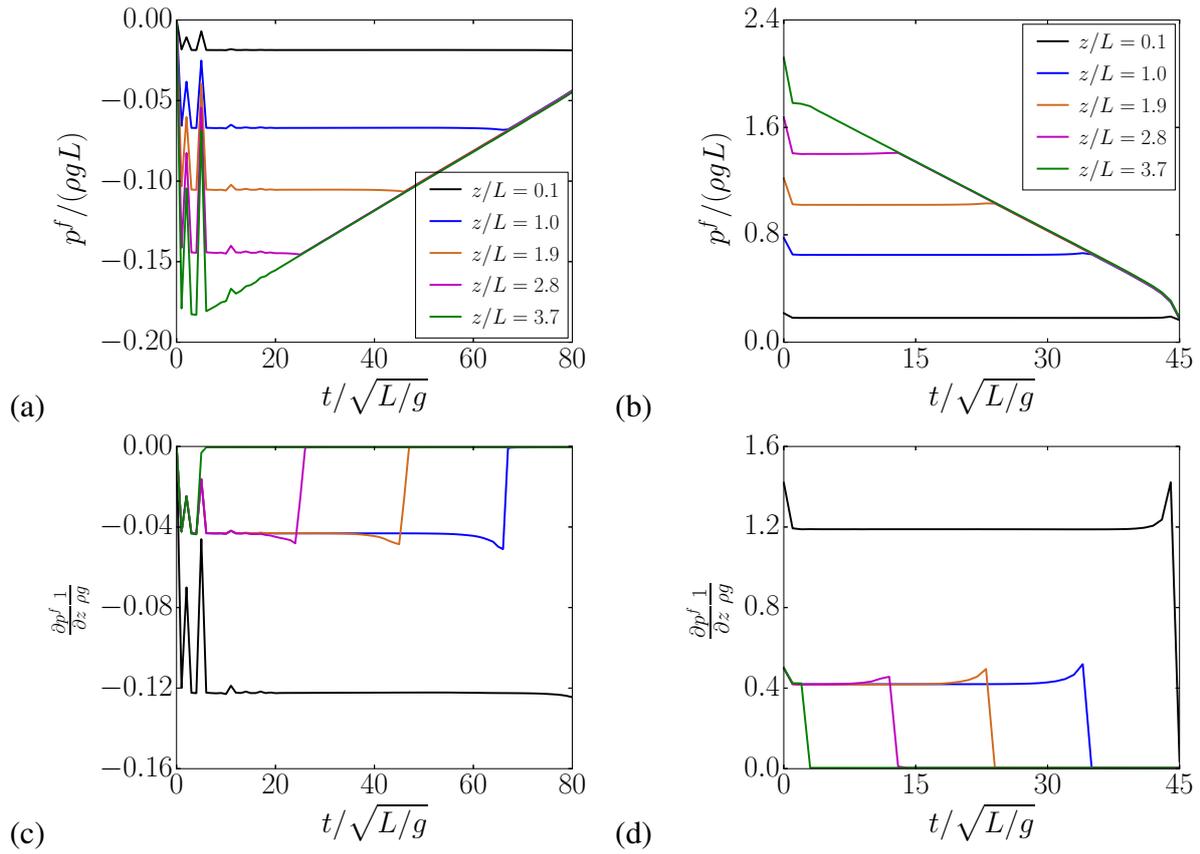


FIGURE 3.38 – Evolution temporelle (a,b) de la pression fluide  $p^f/(\rho g L)$  et (c,d) du gradient vertical de pression  $(\partial p^f/\partial z)/(\rho g)$ , à différentes positions sur la ligne de courant centrale et pour (a,c)  $Q_{air} = 0$  et (b,d)  $Q_{air} = 0.5\sqrt{gL^3}$ .

### 3.4.5 Conclusion

Nous avons à notre disposition un outil numérique qui nous permet de comparer nos expériences à un modèle continu d'écoulement granulaire reposant sur une rhéologie visco-plastique, que ce soit pour l'effet de la géométrie du silo (notamment son épaisseur et la taille et la position de l'orifice), ou pour l'effet de l'injection d'air. Le temps de calcul pour la simulation continue est beaucoup plus court que celui d'une simulation discrète. Pour un cas typique, le temps de calcul de notre simulation 2D peut aller de quelques minutes à quelques dizaines de minutes sur un ordinateur de bureau à 2.8 GHz muni du processeur Core i5. Il est aussi à noter que la vitesse de calcul de *Basilisk* peut atteindre 10 fois celle de *Gerris* pour un nombre de mailles très important. Les simulations sont effectuées sur les clusters de l'Institut d'Alembert sur 1 cœur ou un mac 2.8 GHz Core i5. Les paramètres que nous avons choisis et faits varier seront détaillés le moment opportun dans les chapitres suivants.

# Chapitre 4

## Vidange d'un silo avec un orifice inférieur

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la vidange d'un silo classique, c-à-d vidange avec un orifice inférieur dans un cas d'un silo ouvert. Cette étude, que l'on retrouve dans la littérature, nous servira de référence. De plus elle nous permettra de valider les trois approches que nous avons présentées dans le chapitre précédent : l'expérience, la simulation continue, et la simulation discrète. Enfin nous confronterons nos résultats avec le modèle de [Janda \*et coll.\* \[2012\]](#) présenté dans le chapitre 2.

### 4.1 Résultats expérimentaux

Nous avons étudié la vidange simple des silos cylindriques et rectangulaires que nous avons conçus pour l'étude de l'injection d'air (voir la figure 3.11 du chapitre 3). Ces silos sont très proches de ceux utilisés dans l'étude de [Benyamine \*et coll.\* \[2014\]](#) à laquelle nous comparerons nos résultats. La figure 4.1 montre le débit massique des particules en fonction de la taille des billes pour les deux configurations (a) cylindrique et (b) rectangulaire. Nous pouvons voir avec les données du silo cylindrique que le débit croît fortement avec la taille de l'orifice  $D$  et décroît modérément avec la taille des particules. Nous n'avons dans cette étude qu'une taille  $D$  pour le silo rectangulaire, mais nous retrouvons bien la dépendance en taille des grains.

La loi de vidange proposée par [Janda \*et coll.\* \[2012\]](#) suppose que la vitesse à la sortie suit la loi d'échelle prédite par l'analyse dimensionnelle  $v_o \propto \sqrt{\gamma g D}$  et que la dépendance du débit en  $d$  provient d'une dilatation des particules à l'orifice  $\phi_0 \propto \phi_b G\left(\frac{D}{d}\right)$  avec  $G\left(\frac{D}{d}\right) = \left[1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}\right]$ . Dans le cas du silo cylindrique, la surface de l'orifice vaut  $S_0 = \pi D^2/4$  et la loi de Janda 2.23 s'écrit :

$$Q = C' \phi_b \rho_p G\left(\frac{D}{d}\right) \sqrt{g D^5} = C' \phi_b \rho_p \left[1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}\right] \sqrt{g D^5}, \quad (4.1)$$

Pour vérifier cette loi, nous avons tracé sur la figure 4.2a, le débit normalisé  $Q/(\phi_b \rho_p \sqrt{g d^5})$  en fonction de  $D/d$ . Nous pouvons voir que les données correspondant à 3 tailles de silo et 2 tailles de l'orifice se superposent bien et sont bien ajustées par l'équation 4.1 avec les coefficients

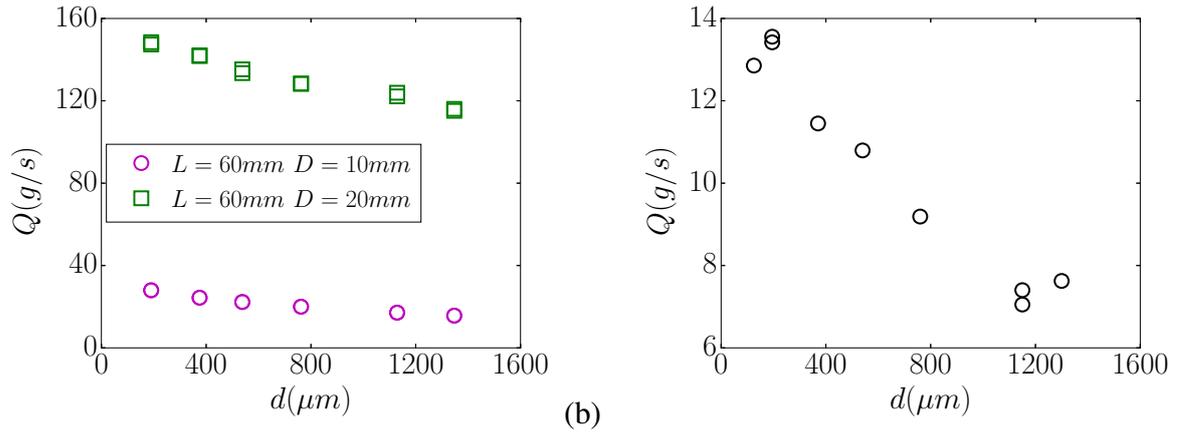


FIGURE 4.1 – Le débit massique de particules  $Q$  en fonction de la taille de particules  $d$  pour (a) le silo cylindrique pour deux taille de l’orifice (b) le silo rectangulaire ( $L = 60\text{mm}$ ,  $W = 3.5\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$ ).

$C' = 0.54$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$  obtenus par la méthode des moindres carrés. Ces valeurs sont très proches de celles obtenues par [Benyamine et coll. \[2014\]](#) ( $C' = 0.75$ ,  $\alpha = 0.96$ , et  $\beta = 0.09$ ). Néanmoins cette représentation, adoptée généralement dans la littérature, met surtout en valeur le comportement asymptotique du débit  $Q \propto \phi_b \rho_p \sqrt{gD^5}$ . Pour tester la forme de la fonction géométrique  $G(D/d)$ , nous avons représenté sur la figure 4.2b, le débit normalisé par la loi asymptotique  $Q/(\phi_b \rho_p \sqrt{gD^5}) \propto \phi_0/\phi_b \propto G(D/d)$  en fonction de  $D/d$ . Dans cette représentation, les données sont un peu plus dispersées, et nous observons une très légère dépendance avec  $L/D$ , néanmoins on retrouve bien la forme de la fonction géométrique prédite par [Janda et coll. \[2012\]](#) (courbe noire).

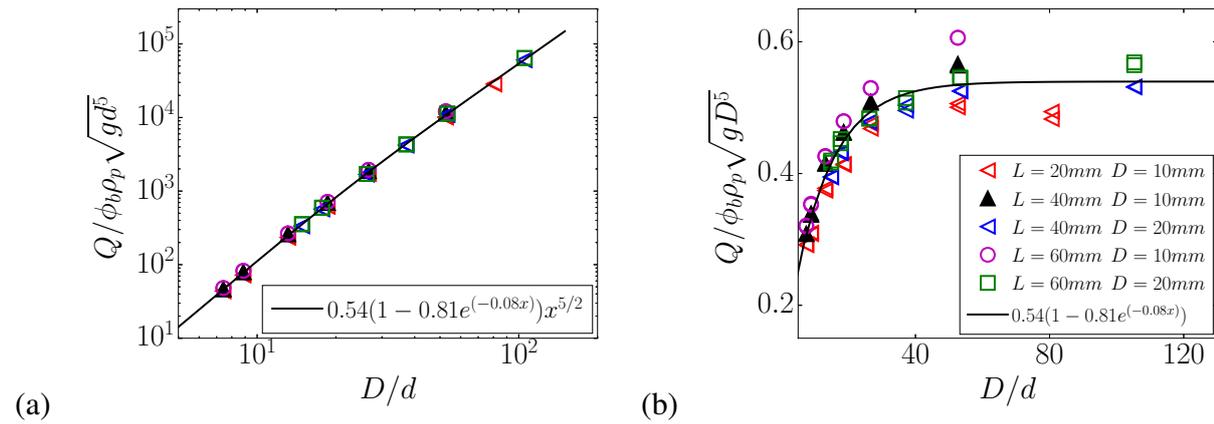


FIGURE 4.2 – Silo cylindrique avec  $L$  et  $D$  variables : débit massique  $Q$  normalisé (a) par  $(\phi_b \rho_p \sqrt{g d^5})$  et (b) par  $\phi_b \rho_p \sqrt{g D^5}$ , en fonction de  $D/d$ . La ligne noire représente l’équation 4.1 avec  $C' = 0.54$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ .

Cette fonction géométrique décrit une dilatation du milieu à l’ouverture si le nombre de particules dans l’ouverture devient faible, les particules devant se dilater pour couler à travers l’orifice.

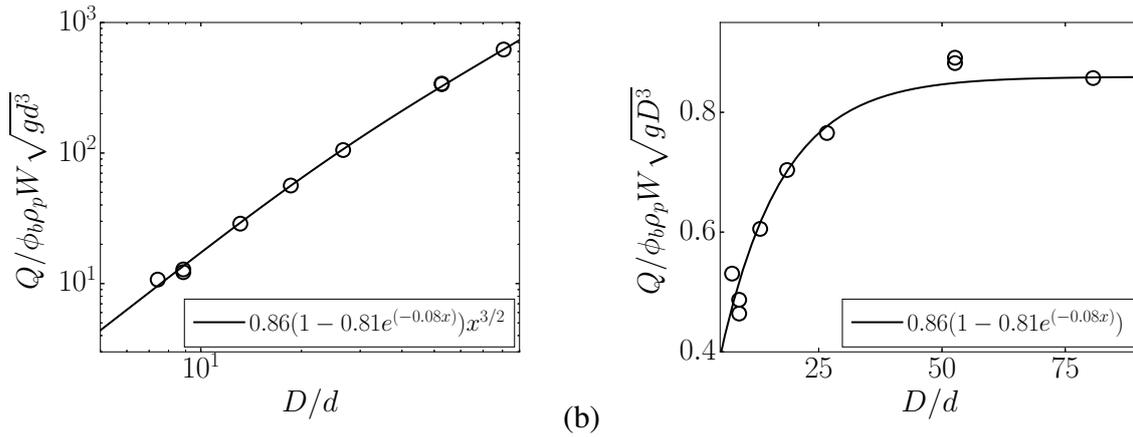


FIGURE 4.3 – Silo rectangulaire avec  $L = 60\text{mm}$ ,  $W = 3.5\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$  : débit massique  $Q$  normalisé (a) par  $(\phi_b \rho_p \sqrt{gd^3})$  et (b) par  $\phi_b \rho_p \sqrt{gD^3}$ , en fonction de  $D/d$ . La ligne noire représente l'équation 4.1 avec  $C' = 0.9$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ .

Dans le cas du silo rectangulaire, la surface de l'orifice s'écrit  $S_0 = WD$  et la loi de Janda 2.23 s'écrit :

$$Q = C' \phi_b \rho_p G \left( \frac{D}{d} \right) W \sqrt{gD^3}, \quad (4.2)$$

Sur la figure 4.3 nous avons représenté le débit normalisé (a) par  $(\phi_b \rho_p W \sqrt{gd^3})$  et (b) par  $\phi_b \rho_p W \sqrt{gD^3}$  pour la série d'expérience que nous avons pour le silo rectangulaire. Nous retrouvons bien la loi asymptotique du débit sur la figure de gauche  $Q \propto \phi_b \rho_p W \sqrt{gD^3}$  ainsi que la loi de la dilation à l'ouverture sur la courbe de droite  $G \left( \frac{D}{d} \right) = \left[ 1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}} \right]$ . Ces données sont ainsi très bien décrites par l'équation 7.7 en utilisant les mêmes coefficients  $\alpha = 0.81$  et  $\beta = 0.08$  que pour le silo cylindrique et en ajustant le coefficient  $C' = 0.86$  par la méthode des moindres carrés. Il est intéressant de noter que l'on retrouve le même facteur géométrique  $G$  pour les deux configurations : cette fonction semble donc être caractéristique du milieu granulaire et non de la géométrie du silo.

## 4.2 Simulation numérique continue

Dans le cas de la simulation numérique continue, la configuration présentée dans ce chapitre correspond exactement à l'étude réalisée précédemment par *Staron et coll.* [2012, 2014] avec *Gerris*. Dans cette simulation, comme nous considérons une fraction volumique constante, nous vérifions simplement que nous retrouvons la loi d'échelle asymptotique pour le débit de vidange  $Q \propto \sqrt{gD^3}$  sur la figure 4.4 (ligne pointillé rouge).

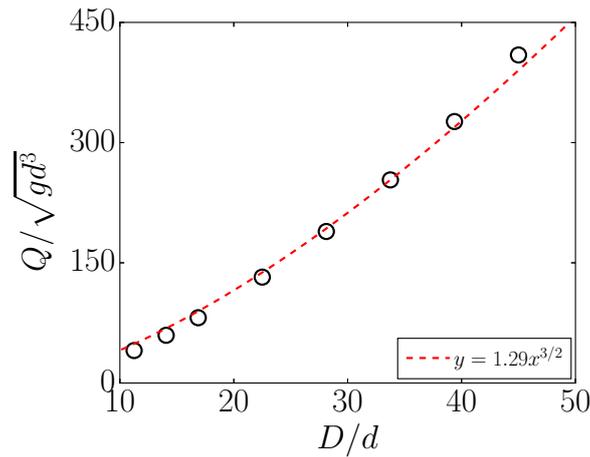


FIGURE 4.4 – Simulation numérique continue : débit normalisé par  $Q/\sqrt{gd^3}$  en fonction de  $D/d$  pour  $L = 90d$  et  $h_p = 3.9L$ . La ligne pointillée correspond à une loi de puissance  $3/2$ .

### 4.3 Simulation numérique discrète

Cette configuration a également déjà été étudiée à travers une simulation discrète par [Percier \[2013\]](#), qui reproduit bien les résultats expérimentaux de [Janda et coll. \[2012\]](#). Nous avons mené cette étude dans un cadre plus large où nous souhaitons étudier la vidange d'un silo pour un mélange bidisperse et valider le modèle présenté par [Benyamine et coll. \[2014\]](#) (voir le chapitre 2). Ces résultats sont présentés dans l'article suivant que nous avons publié dans la revue Physical review E ([Zhou et coll. \[2015\]](#)).

#### 4.3.1 Copie de l'article

# Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo: Discrete particle simulations

Y. Zhou,<sup>1,2</sup> P. Ruyer,<sup>1</sup> and P. Aussillous<sup>2,\*</sup><sup>1</sup>*Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN), PSN-RES, SEMIA, LIMAR, Cadarache, St Paul-Lez-Durance 13115, France*<sup>2</sup>*Aix-Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, Marseille 13013, France*

(Received 11 July 2015; revised manuscript received 13 October 2015; published 10 December 2015)

Discrete particle simulations are used to study two-dimensional discharge flow from a silo using both monodisperse and bidisperse mixtures. The density and the velocity profiles through the aperture are measured. In the monodisperse case, two particles' diameters are studied for different outlet diameters. In the bidisperse case, we varied the fine mass fraction of the mixture. In all cases, the density and the velocity profiles are found to follow the same self-similar law. Based on these observations and the previous work of Benyamine *et al.*, a physical model is proposed to describe the flow of bidisperse mixtures giving an explicit expression for the flow rate that is in good agreement with the results.

DOI: [10.1103/PhysRevE.92.062204](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.92.062204)

PACS number(s): 45.70.Mg, 81.05.Rm

## I. INTRODUCTION

The discharge flow of mixtures of particles from silos is of concern to many processes in the food and pharmaceutical industries. It is also of relevance to the ejection of fuel from a typical fuel rod in a nuclear power station during some hypothetical accidental conditions [1]. In most of situations of practical interest, the granular mixture is not monodisperse, however, few studies have been devoted to the discharge flow of a polydisperse mixture. Arteaga and Tüzün [2], followed by Humby *et al.* [3], studied the flow of bidisperse mixtures through a cylindrical and a conical silo. They proposed to describe the behavior of the mixture using the simplest and most used correlation established by Beverloo *et al.* [4] for the discharge of monodisperse granular media from flat-bottomed silos. This correlation is based on dimensional analysis. It supposes that a free-fall arch exists [5], which scales with a reduce outlet length  $(D - kd)$  explained by the concept of a useless zone (an empty annulus) for the particles close to the wall [6]. This gives a velocity at the outlet of  $v_o \approx \sqrt{g(D - kd)}$  and the flow rate is then

$$Q = C\rho\phi g^{1/2}(D - kd)^{5/2}, \quad (1)$$

where  $Q$  is the mass flow rate,  $g$  the gravitational acceleration,  $\rho$  the particle density,  $\phi$  the particle volume fraction,  $D$  the outlet diameter,  $d$  the particle diameter, and  $C$  and  $k$  are fitted parameters. To describe the mixture flow rate, Arteaga and Tüzün proposed to modify this correlation by

$$Q = C\bar{\rho}g^{1/2}(D - \bar{k}\bar{d})^{5/2}, \quad (2)$$

where  $\bar{\rho}$  is the mixture density and  $\bar{d}$  is a mixture diameter, which characterizes the empty annulus and depends on the fine mass fraction ( $X_f$ ) and the diameter of the coarse ( $d_c$ ) and fine particles ( $d_f$ ),

$$\bar{d} = X_f d_f + (1 - X_f) d_c. \quad (3)$$

The parameter  $\bar{k}$  is a fitted coefficient, which is found to depend on the bed microstructure:  $\bar{k} = 1.85$  for the coarse continuous phase and  $\bar{k} = 1.4$  for the fine continuous phase, where the

transition between microstructures depends on the size ratio ( $r = d_c/d_f$ ).

Recently Benyamine *et al.* [7] performed an experimental study of the discharge flow of a bidisperse granular media from a silo, for a large range of particle diameters, size ratios, and outlet diameters. They proposed a simple physical model to describe the flow of bidisperse mixtures based on the recent experimental work of Janda *et al.* [8] on monodisperse flow. In a two-dimensional (2D) silo, Janda *et al.* found that the velocity and the density profiles at the exit are self-similar, whatever the radius of the aperture  $R = D/2$ , and wrote  $v(x) = v_o[1 - (x/R)^2]^{0.5}$  and  $\phi(x) = \phi_o[1 - (x/R)^2]^{0.22}$ , where  $x$  is the horizontal position. The velocity at the center of the outlet follows,

$$v_o = \sqrt{\gamma g D} \quad (4)$$

with  $\gamma = 1.1$ , and does not depend on the particle diameters. This scaling of the velocity at the center of the outlet is compatible with the concept of a free fall from a hypothetical arch scaling with  $D$ . However, Rubio-Largo *et al.* [9] have shown recently that the free fall arch does not exist as a region below which particles fall solely under gravitational action. Nevertheless, they explained the scaling of the exit velocity based on the acceleration profiles, which collapsed with  $D$ .

The variation of density at the center of the outlet depends on the outlet size and on the particle diameter, exhibiting a dilatancy for small aperture in order to maintain the flow of the material. It can be fitted by an asymptotic growth  $\phi_o = \phi_\infty[1 - \alpha_1 e^{-D/2\alpha_2}]$ , where  $\alpha_2 = 3.3d$ . Benyamine *et al.* [7] have adapted this concept to their configurations, by assuming that the asymptotic value of the density for big orifices is proportional to the initial bulk volume fraction ( $\phi_\infty = \xi\phi_b$ ). They wrote that the density at the center of the outlet is given by

$$\phi_o = \xi\phi_b[1 - \alpha e^{-\beta\frac{D}{d}}] = \xi\phi_b G\left(\frac{d}{D}\right), \quad (5)$$

where  $G(d/D) = [1 - \alpha e^{-\beta\frac{D}{d}}]$  is the geometrical factor, which characterizes the dilatancy at the outlet. In the case of bidisperse flow, the model developed by Benyamine *et al.* [7] is based on the three following assumptions.

\*pascale.aussillous@univ-amu.fr

(i) For each particle size the density keeps the same self-similar form. Then the density at the center of the outlet can be decomposed into

$$\phi_o = \phi_{of} + \phi_{oc}, \quad (6)$$

where  $\phi_{of}$  and  $\phi_{oc}$  are the fine and coarse density at the center of the outlet, respectively.

(ii) For each particle size, the dilatancy expression [Eq. (5)] is still valid independent of the other particle size,

$$\phi_{oi} = \xi \phi_{bi} G\left(\frac{d_i}{D}\right), \quad (7)$$

for ( $i = f, c$ ), where  $\phi_{bf} = X_f \phi_b$  and  $\phi_{bc} = (1 - X_f) \phi_b$  are the fine and coarse initial bulk density, respectively.

(iii) The velocity profile of the mixture keeps its self-similar form, which is independent of the particle diameter [Eq. (4)].

With these hypotheses, Benyamine *et al.* [7] predicted the flow rate of a bidisperse mixture,

$$Q = C' \left[ X_f G\left(\frac{d_f}{D}\right) + (1 - X_f) G\left(\frac{d_c}{D}\right) \right] \rho \phi_b \sqrt{g D S_o}, \quad (8)$$

where  $S_o$  is the outlet surface. This prediction is found to be in good agreement with their measurements, however, a direct validation of the three presumed hypotheses is not possible in the experimental configuration. To investigate the validity of these assumptions, we performed discrete particle simulations of the discharge flow of granular mixture from a silo.

In the literature, discrete particle simulations have been shown to successfully reproduce the discharge flow of monodisperse granular media from a silo, where Beverloo's correlation is recovered (see Ref. [10] for a review). The current work is devoted to the numerical investigation of the flow in silo discharges using both monodisperse and bidisperse material in a two-dimensional configuration. First the simulated system is described, then we discuss the monodisperse cases and compare our data with the observations of Janda *et al.* [8] on the velocity and density profiles at the outlet. The evolution of these profiles in the bidisperse cases is then studied and compared to the assumptions of Benyamine *et al.* [7]. Finally, a model taking into account these observations is proposed to predict the flow of a bidisperse mixture.

## II. SIMULATED SYSTEM

### A. System description and numerical settings

To simulate the discharge flow of particles from a silo, we use the LMGC90 software implementation of the contact dynamics method [11]. The particles, interacting through a dense granular flow, are treated as perfectly rigid and inelastic [12]. Contact dissipation is modeled in terms of a friction coefficient that we set to  $\mu_p = 0.4$  between particles and to  $\mu_w = 0.5$  with the walls.

The two-dimensional silo (Fig. 1) consists of a rectangular tube of height  $H$  and width  $L$ . The outlet is located at the center of the bottom and has a length  $D$ , which was varied.

First, for monodisperse cases, three series of simulations were performed for different disks mean diameter  $d$ : using

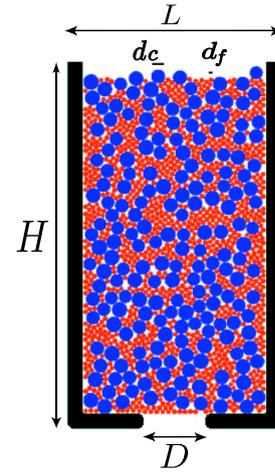


FIG. 1. (Color online) Example of a bidisperse granular media ( $X_f = 0.375$ ) in the silo before the discharge process is initiated.

either  $d = 2$  mm or  $d = 6$  mm, and then using a fixed outlet size  $D = 36$  mm (see Table I). To avoid crystallisation a weak polydispersity of  $\delta d/d = 0.2$  is introduced. With the particles and aperture available, the number of beads in the aperture ( $D/d$ ) ranges between 6 and 36. Then, for the bidisperse case, we consider the flow of a binary mixture corresponding to a size ratio of  $r = d_c/d_f = 3$  between the coarse particles ( $d_c = 6$  mm) and the fine particles ( $d_f = 2$  mm) for an outlet size of  $D = 36$  mm for various fine mass fractions  $X_f$  (see Table II). The number of particles, reported in Tables I and II, was chosen for each simulation to ensure that the discharge flow rate is independent of the column height with  $16D < H < 45D$  [13].

TABLE I. Simulations performed in the monodisperse case for a fixed particle size ( $d = 2$  mm and  $d = 6$  mm) or a fixed outlet size ( $D = 36$  mm), where  $N_p$  is the number of particles and  $N_t$  is the number of time steps.

$D/d$	$d = 2$ mm		$d = 6$ mm	
	$N_p$	$N_t$	$N_p$	$N_t$
6	5000	17600	4000	34000
8	7500	17600	5400	22000
10	10000	20000	8400	22600
12	11500	16000	12000	22600
14	13500	15000	14000	16000
16	15500	10000	16000	9360
18	20000	5200	18000	8000
20			20000	8000
	$D = 36$ mm			
$D/d$	$N_p$		$N_t$	
6.55	4000		27600	
7.2	4350		25940	
8	5400		26000	
9	6750		25000	
10.29	9000		20000	
12	12000		20230	
14.4	16000		5920	
36	50000		1692	

TABLE II. Simulations performed in the bidisperse case with  $d_f = 2$  mm,  $d_c = 6$  mm, and  $D = 36$  mm, where  $X_f$  is the fine mass fraction,  $N_{pf}$  and  $N_{pc}$  are respectively the number of fine and coarse particles, and  $N_t$  is the number of time steps.

$X_f$	$N_{pf}$	$N_{pc}$	$N_t$
0.125	3500	2722	30000
0.25	7000	2333	25000
0.377	10500	1944	20000
0.5	14000	1555	17516
0.625	17500	1166	9000
0.75	21000	777	6000
0.876	21000	332	6000

To ensure that the lateral walls do not influence significantly the flow, we impose  $L = 3D$  [14]. The wall thickness is imposed to be equal to the diameter of the biggest particle in the silo ( $d_M$ ), with a circular shape at the edge of the outlet (see Fig. 1).

The granular column is prepared by the random deposition of the particles, minimizing the gravitational potential, in the closed silo. A typical bidisperse initial condition is shown in Fig. 1. After the preparation phase, simulations are run with a time step of  $\delta t = 5 \times 10^{-4}$  s for the number of time steps  $N_t$  reported in Tables I and II. The computational domain is periodic in the vertical direction to keep constant the number of particles. The horizontal boundaries of the computational domain are set at a distance of  $10d_M$  below and above the silo.

### B. Numerical statistics and averages

The simulated granular material and its flow are characterized by a set of ensemble-averaged properties that could vary over different time (unsteady) and space (inhomogeneous) scales. From the discrete numerical representation of LMGC90, several averages are computed to study the processes at the scale of the outlet that could govern the steady flow rate at the silo scale.

The bulk volume fraction  $\phi_b$  of a population of particles filling the silo is measured before its discharge. It is obtained by considering the space average of the particle indicator function, whose value is 1 over the spatial extent of particles, and 0 otherwise. This average is calculated over the silo, excluding a region near the boundaries of size  $D$ . That corresponds to a sample leading to an accuracy of  $5 \times 10^{-3}$  of the absolute value of  $\phi_b$ .

For bidisperse cases, the mass fraction  $X_f$  of the population is defined with respect to the whole set of particles initially in the silo. The bulk particle volume fraction obtained is given in Fig. 2 as a function of the fine mass fraction. As shown in the literature [2],  $\phi_b$  goes through a maximum around  $X_f \approx 0.25$ , corresponding to dense packing where the fine particles fill the voids between the coarse particles. It can be noted that the fine particles correspond to a packing slightly denser than the coarse particles packing. Finally, the column height is given by  $H = S_p / \phi_b L$ , where  $S_p$  is the total area occupied by particles in the silo.

Let us now consider the discharge. A snapshot of all particle positions is recorded every two time steps. From these snapshots, we first measured globally the instantaneous

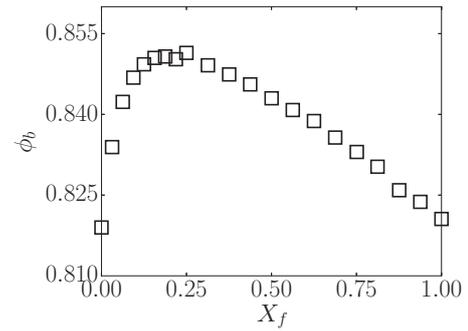


FIG. 2. Bulk particle volume fraction versus the fine mass fraction ( $X_f$ ) in the bidisperse case (see Table II).

flow rate  $Q_i = (\sum_{\delta t} S_p) / \delta t$  corresponding to the surface of particles leaving the silo during a time interval  $\delta t = 0.1$  s. A typical temporal evolution of the instantaneous flow rate is shown in Fig. 3, where it is found to reach rapidly a rather constant value corresponding to the steady state. The steady flow rate  $Q$  is obtained by time averaging the instantaneous flow rate during this steady state.

Then following Janda *et al.* [8], we measured the profile of the particle volume fraction  $\phi(x)$  and the velocity  $v(x)$  locally at the outlet. These are the average of the statistics performed over the set of snapshots of a computation of a steady flow during, say  $\Delta t$  seconds. Since the studied flow is steady, by ergodicity this time average is equivalent to an ensemble average. For each snapshot, one considers the statistics to be homogeneous over a rectangular domain centered on the measurement location  $x$ . The width of this rectangle is  $0.2\bar{d}$ , where  $\bar{d}$  is the mixture diameter defined in Eq. (3), that is actually small with regard to the typical lateral variation of the profiles (that scales with  $D$ ). The typical length of the  $\phi$  axial variation due to free fall of particles of velocity  $v$  is  $v^2/g$ . At the outlet of the silo, the velocity  $v$  is scaled by  $\sqrt{gD}$  and the length scales as  $D$ . The height of the rectangular domain is chosen as the outlet wall thickness, which is small with respect to  $D$  so that the ergodicity between the space average performed over this square and an ensemble average is valid. The particle volume fraction,  $\phi(x)$ , is the average over the integration volume (in space and time) of the indicator function of the particles. To reach a relative accuracy  $\varepsilon$  of the statistical

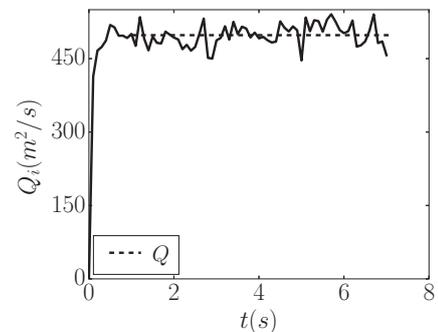


FIG. 3. Temporal evolution of the instantaneous mass flow rate for  $d = 2$  mm and  $D = 16$  mm in the monodisperse case. The dashed line represents the mean flow rate  $Q$ .

estimation of the average value of  $\phi(x)$ , it is required that  $\Delta t$  be of the order of  $\pi d^2/(v 0.2\bar{d} \phi^2 \varepsilon)$  for particles of size  $d$  and velocity  $v$ . Scaling  $v$  by the average outlet velocity allows for an estimate of the calculation time needed to obtain a given accuracy. In the bidisperse case, these measurements are done for the mixture, but also independently for the coarse and fine particles. It is then obvious that relatively low accuracy will be achieved for the coarse particles when their mass fraction (and therefore  $\phi_c$ ) is low in comparison with the accuracy over the fine particles at the same conditions. From the profiles of  $\phi$ , we define the mean outlet value  $\bar{\phi}$  as the space average of these profiles over the outlet width  $D$ .

The velocity profile at the outlet of a particle population (mixture, fine or coarse) is obtained as the ensemble average (over the same sample) of the individual particle velocity weighted by their volume intersection with the integration domain. It is therefore the space and time average of the product of the indicator function by the individual velocity divided by  $\phi$ . Since standard deviation of the velocity distribution is small, the convergence of statistics toward the average value is more rapid than for  $\phi$ . We checked that the cross products of the fluctuations is small since  $Q \simeq \bar{v}\bar{\phi}$ .

### III. RESULTS AND DISCUSSION

We will now present the simulations results obtained for the discharge of particles from the silo. We will first focus on the monodisperse flow and we will compare our results with those obtained experimentally by Janda *et al.* [8] and numerically by Percier [15] in a similar 2D configuration. These results will be used as a reference for the bidisperse flow studied in the second part.

#### A. Monodisperse flow

In the monodisperse case, Fig. 4(a) shows the measured particle volume fraction at the outlet, as a function of the horizontal distance from the outlet center,  $x$ , for the particles of diameter  $d = 2$  mm and for all the outlet diameters simulated. To verify the self-similarity of these profiles, as observed experimentally by Janda *et al.* [8], we chose to normalize the volume fraction by the mean volume fraction,  $\bar{\phi}$ , to avoid the small scattering visible on the volume fraction in the center

of the outlet due to the uncertainty of the measurement. The normalized volume fraction is plotted in Fig. 4(b) versus the horizontal position normalized by the radius of the outlet ( $R = D/2$ ). As expected, the profile is found to be self-similar as the data are all superimposed. Following Janda *et al.* [8] we adjusted the normalized profile by

$$\phi(x) = \bar{\phi} \gamma(v_\phi) \left[ 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]^{v_\phi}, \quad (9)$$

where  $\gamma(v) = (2/\sqrt{\pi})\Gamma(v + 3/2)/\Gamma(v + 1)$  was obtained by integration. The fitting parameter  $v_\phi = 0.19 \pm 0.01$  is obtained using the least-squares methods and closely matched those reported in previous work [8,15]. We observe exactly the same behavior for the simulations done with the particles of diameter  $d = 6$  mm and those with a constant outlet diameter  $D = 36$  mm, where all the normalized volume fractions can be adjusted by Eq. (9) with the same power law,  $v_\phi = 0.19$ .

We now turn to the study of the evolution of the mean volume fraction,  $\bar{\phi}$ , with the parameters of the simulation. Again, following Janda *et al.*, Fig. 4(c) shows the mean volume fraction at the outlet made dimensionless by the bulk volume fraction versus the number of beads in the aperture,  $D/d$ , for the three series of monodisperse simulations,  $d = 2$  mm ( $\circ$ ),  $d = 6$  mm ( $\Delta$ ), and  $D = 36$  mm ( $\times$ ). The data superimpose, as observed experimentally by Janda *et al.*, with the mean volume fraction exhibiting an increase from a loose packing for small numbers of beads in the aperture to a tendency to saturate toward 89% of the bulk volume fraction for large numbers. The data are well represented by the expression of Janda *et al.* (see the full line in the figure),

$$\bar{\phi} = \xi_\phi \phi_b [1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}] = \xi_\phi \phi_b G\left(\frac{d}{D}\right), \quad (10)$$

with the fitting parameters  $\xi_\phi = 0.89$ ,  $\alpha = 0.45$ , and  $\beta = 0.13$  (obtained using the least-squares method), which closely match those reported in previous work [8,15]. We note that  $G(d/D) = [1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}]$ , the function that depends on the number of beads in the aperture and characterizes the dilatancy at the outlet due to the geometrical constraint.

In the same way, the profiles of the vertical component of the velocity,  $v(x)$ , and the profiles of the horizontal component of the velocity,  $u(x)$ , for the particles of diameter  $d = 2$  mm are

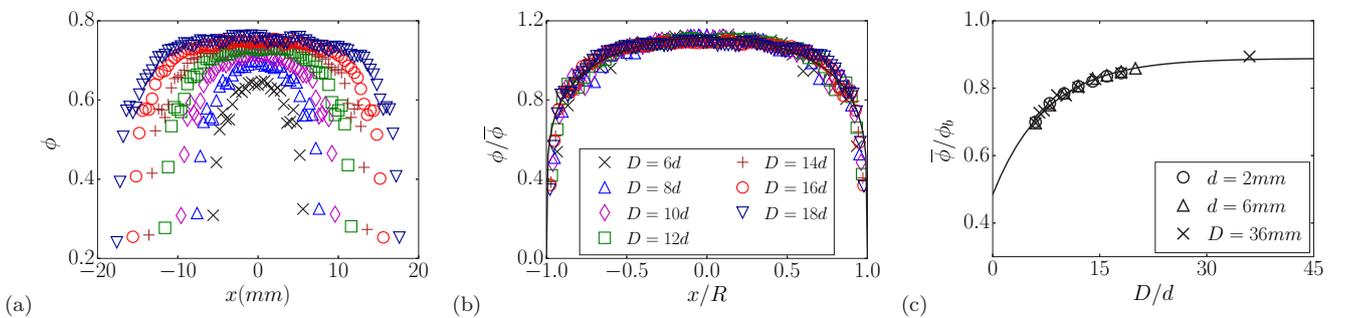


FIG. 4. (Color online) Monodisperse flow of particles of diameter of  $d = 2$  mm for different outlet diameters. (a) Horizontal profiles of the volume fraction versus the position ( $x$ ). (b) Horizontal profiles of the volume fraction normalized by the mean volume fraction ( $\bar{\phi}$ ) versus the position normalized by the outlet radius ( $R = D/2$ ). The full line represents Eq. (9) with  $v_\phi = 0.19$ . (c) Mean volume fraction at the outlet ( $\bar{\phi}$ ) normalized by the bulk volume fraction ( $\phi_b$ ) versus the outlet diameter normalized by the particle diameter ( $D/d$ ), for the three series of monodisperse simulations. The full line represents Eq. (10) with  $\xi_\phi = 0.89$ ,  $\alpha = 0.45$ , and  $\beta = 0.13$ .

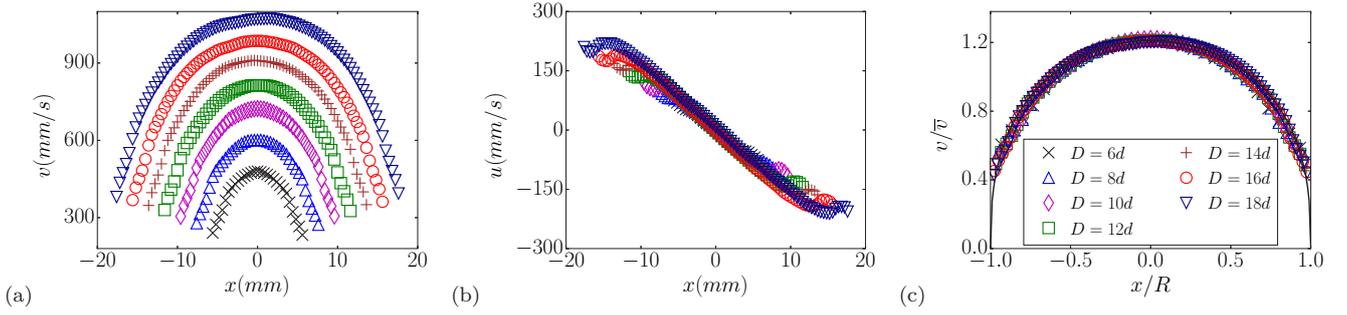


FIG. 5. (Color online) Monodisperse flow of particles of diameter of  $d = 2$  mm for different outlet diameters. (a) Horizontal profiles of the vertical velocity  $v$ . (b) Horizontal profiles of the horizontal velocity  $u$ . (c) Horizontal profiles of the vertical velocity made dimensionless by the mean vertical velocity ( $\bar{v}$ ) versus the position normalized by the outlet radius ( $R = D/2$ ). The full line represents Eq. (11) with  $\nu_v = 0.38$ .

plotted, respectively, in Figs. 5(a), 5(b). The vertical velocity profiles are quasiparabolic and depend on the outlet diameter, whereas the horizontal velocity profile is found to be mainly linear. These profiles show that the flow out of the silo is not fully vertical but has a horizontal component towards the center. It is interesting to note that the horizontal profiles seem to be nearly self-similar without any normalization, whereas the vertical profiles present a self-similarity when normalized by the mean velocity as a function of the horizontal position made dimensionless by the radius of the outlet, see Fig. 5(c). Following Janda *et al.* [8], we have adjusted the vertical profile by

$$v(x) = \bar{v} \gamma(\nu_v) \left[ 1 - \left( \frac{x}{R} \right)^2 \right]^{\nu_v}, \quad (11)$$

with the fitting parameter  $\nu_v = 0.38 \pm 0.01$  obtained using the least-squares method. This coefficient, similar to that obtained numerically in a 2D discrete simulation by Percier [15], is slightly lower than that obtained experimentally by Janda *et al.* ( $\nu_v = 0.5$ ). This may be explained by the difference in the geometries between the simulations, corresponding to a column of disks, and the experiments, corresponding to a column of one layer of spheres between two plates. Again, we observe exactly the same behavior for the simulations done with the particles of diameter  $d = 6$  mm and those with a constant outlet diameter  $D = 36$  mm, where all the normalized vertical velocities can be adjusted by Eq. (11) with the same power law,  $\nu_v = 0.38$ .

Following Janda *et al.*, the evolution of the mean vertical velocity  $\bar{v}$  is plotted in Fig. 6(a) versus the outlet radius for the three series of simulations in the case of monodisperse flow, corresponding to constant particle diameters  $d = 2$  mm ( $\circ$ ) and  $d = 6$  mm ( $\Delta$ ) or constant outlet diameter  $D = 36$  mm ( $\times$ ). The collapse of the data is not completely satisfactory and the adjustment by a square root law is not as fair as expected (see the full line in the figure corresponding to  $\bar{v} = 1.46\sqrt{gD}$ ). It seems in our simulation that the particle diameter plays a role in the determination of the mean vertical velocity. This is particularly visible for the data corresponding to a constant outlet diameter ( $\times$ ) where the velocity is not constant when the particle diameter varies.

To take this role into account, we have plotted in Fig. 6(b) the mean velocity made dimensionless by  $\sqrt{gd}$  versus the

number of beads in the aperture  $D/d$ . In this representation, the data collapse in a single curve. To be consistent with the asymptotic value and with the observations made on the mean volume fraction, we have adjusted the mean vertical velocity by

$$\bar{v} = \xi_v \sqrt{gD} [1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}] = \xi_v \sqrt{gD} G\left(\frac{d}{D}\right) \quad (12)$$

with the fitting parameter  $\xi_v = 1.55$  and the same fitting parameters in the geometrical function  $G(d/D)$  as the ones obtained for the volume fraction. This suggests that the same physical mechanism is responsible for the reduction in the

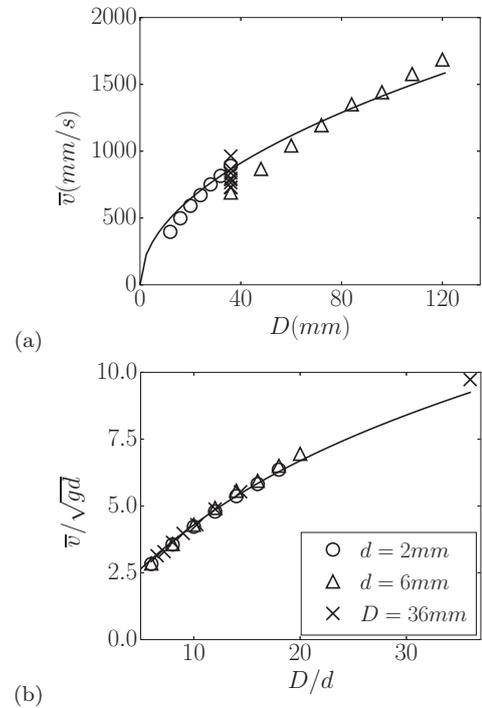


FIG. 6. (a) Mean vertical velocity versus the length of the aperture  $D$ . The full line represents the best fit with a square root law,  $\bar{v} = 1.46\sqrt{gD}$ . (b) Mean vertical velocity made dimensionless by  $\sqrt{gd}$  versus the number of beads in the apertures  $D/d$ . The full line represents Eq. (12) with  $\xi_v = 1.55$ ,  $\alpha = 0.45$ , and  $\beta = 0.13$ .

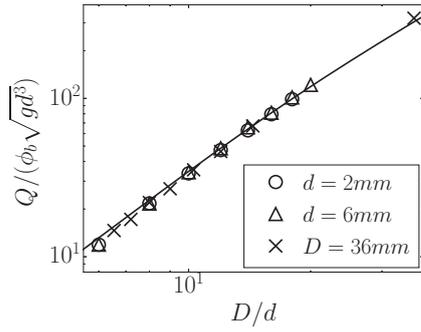


FIG. 7. Flow rate made dimensionless by  $\sqrt{g d^3}$  versus the number of beads in the aperture  $D/d$ . The full line represents Eq. (13) with  $C = 1.42$ .

mean velocity and the mean volume fraction at the outlet when the number of beads in the aperture decreases, which is consistent with a continuous description of the granular media throughout the silo, even close to the outlet [9,16].

Finally, we can deduce, from Eqs. (9)–(12), the discharge flow rate of monodisperse beads from a two-dimensional silo,

$$Q = \int_{-D/2}^{D/2} \phi(x)v(x)dx = C \left[ G \left( \frac{d}{D} \right) \right]^2 \phi_b \sqrt{g D^3}, \quad (13)$$

where  $C = \xi_\phi \xi_v \gamma(v_v) \gamma(v_\phi) \int_0^1 (1-t^2)dt = 1.42$ .

In Fig. 7, the measured flow rate made dimensionless by  $\sqrt{g d^3}$  is plotted versus the number of beads in the aperture  $D/d$  for the three series of simulations (constant particle diameters  $d = 2$  mm,  $\circ$ , and  $d = 6$  mm,  $\triangle$ , or constant outlet diameter  $D = 36$  mm,  $\times$ ). We recover the classical result corresponding to a collapse of the data on a single curve, which is in excellent agreement with Eq. (13) with  $C = 1.42$  (see the full line in the figure). As pointed out by Janda *et al.* [8], the precise knowledge of the profiles of the volume fraction and velocity of particle through the outlet allow an accurate prediction of the flow rate, based on physical observations. The monodisperse study will be used in the following as a reference for the bidisperse flow.

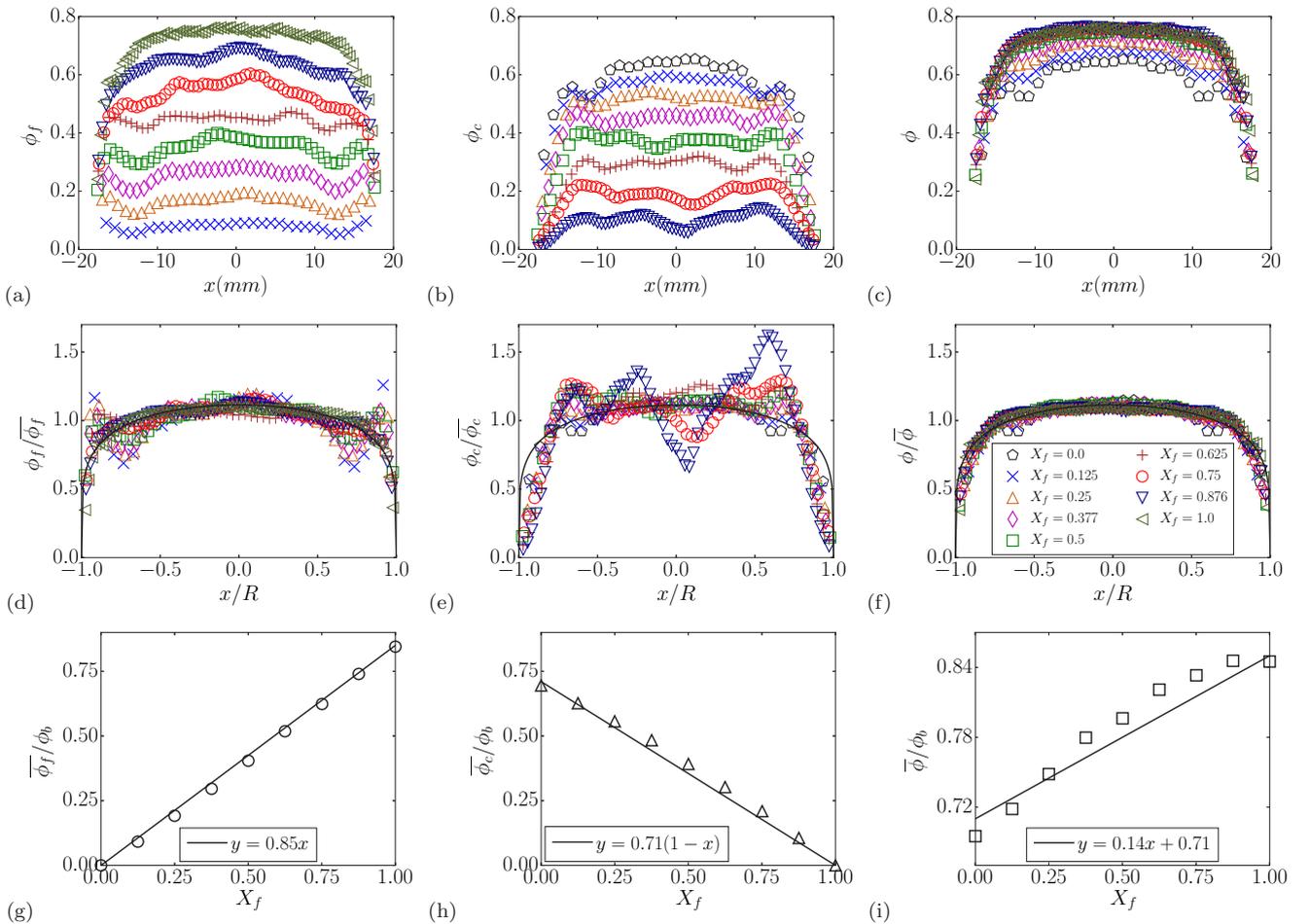


FIG. 8. (Color online) Flow of a bidisperse mixture with  $d_f = 2$  mm and  $d_c = 6$  mm for an outlet length  $D = 36$  mm, for different fine mass fractions: horizontal profiles of the volume fraction for (a) the fine particles, (b) the coarse particles, and (c) the mixture. Horizontal profile of the volume fraction made dimensionless by the mean volume fraction, versus the horizontal position normalised by the radius of the outlet, for (d) the fine particles, (e) the coarse particles, and (f) the mixture. The full line represents Eq. (9) with  $v_\phi = 0.19$ . Mean volume fraction at the outlet  $\bar{\phi}$  normalised by the bulk volume fraction ( $\phi_b$ ) versus the fine mass fraction  $X_f$ , for (g) the fine particles, (h) the coarse particles, and (i) the mixture. The full lines represent respectively, Eqs. (16), (17), and (18).

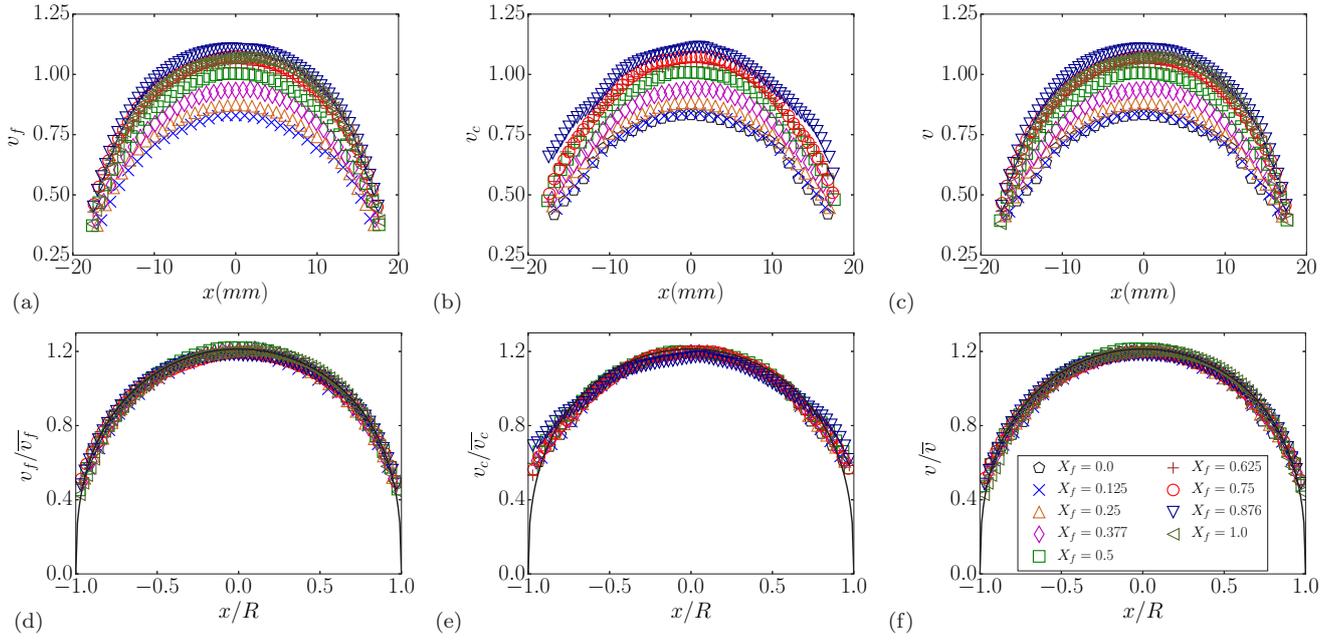


FIG. 9. (Color online) Flow of a bidisperse mixture with  $d_f = 2$  mm and  $d_c = 6$  mm for an outlet length  $D = 36$  mm, for different fine mass fractions: horizontal profiles of the vertical velocity for (a) the fine particles, (b) the coarse particles, and (c) the mixture. Horizontal profiles of the vertical velocity normalized by the mean vertical velocity, versus the horizontal position normalized by the radius of the outlet, for (d) the fine particles, (e) the coarse particles, and (f) the mixture. The full line represents Eq. (11) with  $v_v = 0.38$ .

### B. Bidisperse flow

To predict the flow of a bidisperse mixture from a silo, Benyamine *et al.* [7] have developed a model based on three assumptions. The measurement of the horizontal profile of the volume fraction and the velocity at the outlet of both the fine and coarse particles will enable testing of these assumptions, one by one.

(i) In their model, Benyamine *et al.* first assumed that for each particle size the volume fraction keeps the same self-similar form. In the case of the flow of bidisperse mixture with  $d_f = 2$  mm and  $d_c = 6$  mm for an outlet length  $D = 36$  mm, Figs. 8(a), 8(b) show the horizontal profile of the volume fraction for various fine mass fractions,  $X_f$ , for the fine and coarse particles. These profiles are found to be self-similar when normalized by the mean volume fraction as shown in Figs. 8(d), 8(e), and they correspond to the prediction of Eq. (9), with  $v_\phi = 0.19$  as for the monodisperse case (full line in the figures). The first condition is consequently fulfilled, which is demonstrated by the fact that horizontal profile of the volume fraction of the mixture follows the same self-similarity as can be seen in Figs. 8(c), 8(f). Subsequently into the mean volume fraction at the outlet can be decomposed

$$\bar{\phi} = \bar{\phi}_f + \bar{\phi}_c, \quad (14)$$

where  $\bar{\phi}_f$  and  $\bar{\phi}_c$  are respectively the fine and coarse mean volume fraction at the outlet.

(ii) Second, they assumed that for each particle size, the dilatancy expression obtained in the monodisperse case is still

valid independently of the other particle size,

$$\bar{\phi}_i = \xi_\phi \phi_{bi} G\left(\frac{d_i}{D}\right), \quad (15)$$

for ( $i = f, c$ ). Considering that the fine and coarse initial bulk density are respectively given by  $\phi_{bf} = X_f \phi_b$  and  $\phi_{bc} = (1 - X_f) \phi_b$ , implies that

$$\bar{\phi}_f = X_f \phi_b \xi_\phi G\left(\frac{d_f}{D}\right), \quad (16)$$

$$\bar{\phi}_c = (1 - X_f) \phi_b \xi_\phi G\left(\frac{d_c}{D}\right), \quad (17)$$

$$\bar{\phi} = \phi_b \xi_\phi \left[ X_f G\left(\frac{d_f}{D}\right) + (1 - X_f) G\left(\frac{d_c}{D}\right) \right]. \quad (18)$$

These predictions are compared to the results obtained from the simulations in Figs. 8(g)–8(i) where the mean volume fraction at the outlet ( $\bar{\phi}$ ) normalized by the bulk volume fraction ( $\phi_b$ ) is plotted versus the fine mass fraction  $X_f$ , respectively for the fine particles, the coarse particles and the mixture. The agreement is found to be fairly good, which validates this second hypothesis.

(iii) Finally, they assumed that the velocity profile of the mixture keeps its self-similar form, which is independent of the particle diameter. However, in our simulation the velocity profile for the monodisperse case is found to depend on the number of particles in the aperture. Nevertheless, Fig. 9 shows that the vertical profile in the bidisperse case for the fine particles, the coarse particles and the mixture retain their self-similar form if normalized by the mean vertical velocity. Again, Eq. (11), with  $v_\phi = 0.38$ , found for the monodisperse case fits the data very well.

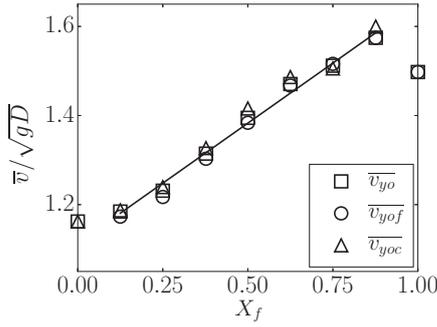


FIG. 10. Mean velocity of the fine particles ( $\circ$ ), the coarse particles ( $\Delta$ ), and the mixture ( $\square$ ) versus the fine mass fraction  $X_f$ . The full line represents the best linear fit excluding the pure cases ( $X_f = 0$  and 1).

Figure 10 shows the mean velocity versus the fine mass fraction for the fine particles ( $\circ$ ), the coarse particles ( $\Delta$ ), and the mixture ( $\square$ ). The important finding exhibited in this figure is that the velocity of the fine and coarse particle are identical for a given fine mass fraction. This means that the mixture behaves as a continuous media with  $\bar{v}(X_f) = \bar{v}_f(X_f) = \bar{v}_c(X_f)$ . This also implies that there is no segregation for our conditions. Moreover the data, excluding the monodisperse cases, seems to follow a linear trend,

$$\bar{v}/\sqrt{gD} = \xi_v[1.07X_f + 0.72(1 - X_f)] = \xi_v K(X_f); \quad (19)$$

see the full line in the figure. These observations suggest that the spatial arrangement of the grains close to the outlet is the single feature that depends on the size distribution of the granular material. In this hypothesis, the different behavior of the monodisperse case could correspond to a specific arrangement when the mixture is monosized. A future work on the spatial organization of the grains near the outlet should test this hypothesis.

Finally, using Eqs. (14)–(19), we obtain a new formula to describe the discharge flow rate bidisperse beads from a two-dimensional silo,

$$Q = CK(X_f) \left[ X_f G\left(\frac{d_f}{D}\right) + (1 - X_f) G\left(\frac{d_c}{D}\right) \right] \phi_b \sqrt{gD^3}, \quad (20)$$

where  $C = 1.42$  corresponds to the same prefactor as in Eq. (13). This equation is plotted in Fig. 11 and is found to be in good agreement with the results of the numerical simulations.

#### IV. CONCLUSION

We have numerically studied the discharge flow of both monodisperse and bidisperse mixtures of disks from a two-dimensional silo using discrete particle simulations in the stationary regime. The density and the velocity profiles through the aperture were measured, in the monodisperse case for two particles' diameters, varying the outlet diameters, and for one outlet diameter, varying the particle diameters. In the bidisperse case both profiles are measured for each species and for the mixture.

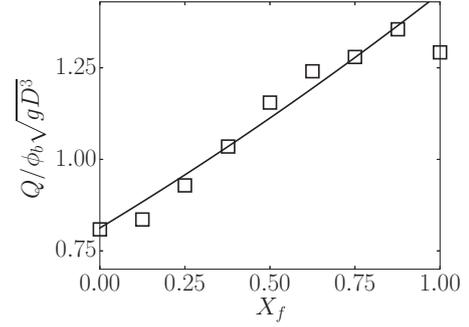


FIG. 11. Flow rate  $Q$  made dimensionless by  $\phi_b \sqrt{gD^3}$  versus the fine mass fraction  $X_f$  in the bidisperse case. The full line represents a linear fit excluding the monodisperse cases given in Eq. (19).

In the case of monodisperse particles, we recovered most of the experimental observations of Janda *et al.* [8]. The density and the velocity profiles are found to follow a given self-similar law in the whole range of parameters. The mean density at the outlet exhibits a dilatancy depending on the number of beads in the aperture. However, contrary to Janda *et al.* [8], the mean vertical velocity is found to depend also on the number of beads in the aperture, with the same geometrical factor as the mean density.

In the case of the bidisperse particles, we validated the hypothesis developed previously by Benyamine *et al.* [7] on the density to predict the flow rate of the bidisperse granular media from a silo. We found that the horizontal profiles of the density of the fine particles, the coarse particles and the mixture, keep the same self-similarity as for the monodisperse case, whatever the fine mass fraction. Then, we showed that the dilatancy expression is still valid for each particle size, independent of the other particle size. Finally, the model of Benyamine *et al.* assumes that the particle velocities at the outlet are the same whatever the particle diameters. As the velocity depends on the particle diameters, this hypothesis is not fulfilled. However, we observed that the velocity profiles follow the same self-similarity as for the monodisperse case. For a given fine mass fraction, we observed that the mixture behaves as a continuous media with the same mean velocity for each species and the mixture. We found that the mixture velocity is roughly proportional to the fine mass fraction. Based on all of these hypothesis, we proposed an expression for the flow rate of a bidisperse mixture [Eq. (20)], which is in good agreement with our simulation data.

Our results suggest that during the discharge flow of a silo the bidisperse mixture can be seen as a continuous media even close to the outlet, as pointed out recently in the case of monodisperse flow [9,16]. The dilatancy of the mixture at the outlet plays a major role in the dependance of the flow rate with the particle size.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank R. Mozul and F. Perales for assistance with LMGC90, and J.E. Butler for a critical reading.

- [1] A. Martin, Thesis, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2010 (unpublished).
- [2] P. Arteaga and U. Tüzün, *Chem. Eng. Sci.* **45**, 205 (1990).
- [3] S. Humby, U. Tüzün, and A. B. Yu, *Chem. Eng. Sci.* **53**, 483 (1998).
- [4] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. V. de Velde, *Chem. Eng. Sci.* **15**, 260 (1961).
- [5] B. Tighe and M. Sperl, *Granul. Matter* **9**, 141 (2007).
- [6] R. L. Brown and J. C. Richards, *Trans. Instn. Chem. Engrs.* **38**, 243 (1960).
- [7] M. Benyamine, M. Djermane, B. Dalloz-Dubrujeaud, and P. Aussillous, *Phys. Rev. E* **90**, 032201 (2014).
- [8] A. Janda, I. Zuriguel, and D. Maza, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 248001 (2012).
- [9] S. M. Rubio-Largo, A. Janda, D. Maza, I. Zuriguel, and R. C. Hidalgo, *Phys. Rev. Lett.* **114**, 238002 (2015).
- [10] H. Zhu, Z. Zhou, R. Yang, and A. Yu, *Chem. Eng. Sci.* **63**, 5728 (2008).
- [11] F. Dubois, M. Jean, M. Renouf, R. Mozul, A. Martin, and M. Bagneris, 10e colloque national en calcul des structures, May 2011, Giens, France (unpublished).
- [12] F. Radjai and F. Dubois, *Discrete-element modeling of granular materials* (Wiley-Iste, London, 2011), p. 425.
- [13] D. Hirshfeld and D. Rapaport, *Eur. Phys. J. E* **4**, 193 (2001).
- [14] R. M. Nedderman, U. Tuzün, S. B. Savage, and G. T. Houlsby, *Chem. Eng. Sci.* **37**, 1597 (1982).
- [15] B. Percier, Thesis, Université Lyon I - ENS de Lyon, 2013 (unpublished).
- [16] L. Staron, P.-Y. Lagrée, and S. Popinet, *Phys. Fluids* **24**, 103301 (2012).

### 4.3.2 Complément à l'article : influence de la largeur du silo

Dans cette étude, pour garder un temps de calcul raisonnable, nous avons choisi de faire varier la largeur du silo en même temps que le diamètre de l'orifice en imposant  $L = 3D$ . Afin de vérifier que l'effet observé est bien dépendant de  $D/d$  et non de  $L/d$  nous avons effectué une nouvelle série de calcul en monodisperse avec  $D = 36mm$ ,  $L/D = 4$ , et  $d$  variable. Les résultats obtenus pour la fraction volumique à la sortie sont comparés à ceux de l'article sur la figure 4.5. Nous avons gardé le même ratio  $H/L$  dans les deux séries de calculs. Nous pouvons voir que si l'on trace les courbes en fonction de  $D/d$  les résultats pour les 2 largeurs sont sensiblement équivalents sur toute la gamme considérée (figure 4.5a), alors que si on les représente en fonction de  $L/d$  les deux séries de points s'écartent (figure 4.5b). Ce résultat nous conforte dans l'interprétation d'une dépendance de la fraction volumique à l'orifice et donc du débit en  $D/d$  et non en  $L/d$ .

### 4.3.3 Complément à l'article : validité du modèle de Janda

Nous avons vu dans l'article qu'avec la simulation discrète d'une vidange simple nous retrouvons bien la dilatation à la sortie,  $\phi_0 \propto G(D/d)\phi_b$  observée par Janda *et coll.* [2012], avec  $G\left(\frac{D}{d}\right) = \left[1 - \alpha e^{-\beta\frac{D}{d}}\right]$ . Cependant nous observons également une dépendance de la vitesse à la sortie avec la même fonction géométrique :

$$v_0 \propto G(D/d)\sqrt{gD} \quad (4.3)$$

Cela n'a pas été observé expérimentalement par Janda *et coll.* [2012] ni numériquement par Percier [2013]. Toutefois ces auteurs n'ont pas fait varier la taille des particules. Il serait intéressant de vérifier cette dépendance, établie en 2D, par des simulations en 3D ainsi que par des mesures expérimentales. Elle ne met cependant pas en défaut la loi utilisée pour prédire le débit de particules, en effet on peut écrire :

$$Q = c \left[ G\left(\frac{D}{d}\right) \right]^2 \phi_b \sqrt{gD^3} \approx C' G_2\left(\frac{D}{d}\right) \phi_b \sqrt{gD^3}, \quad (4.4)$$

où  $G_2(D/d) = \left[1 - \alpha_2 e^{-\beta\frac{D}{d}}\right]$  avec  $\alpha_2 = 2\alpha$ . Dans la gamme de rapport  $D/d$  considérée ( $D/d > 6$ ), cette approximation  $G^2 \approx G_2$  conduit à moins de 5% d'erreur.

## 4.4 Conclusion et perspective

Dans ce chapitre nous avons utilisé les trois approches, expérience, simulation continue et simulation discrète, pour étudier la vidange simple d'un silo avec un orifice inférieur, en géométrie cylindrique ou rectangulaire. Dans cette étude nous retrouvons les résultats de la littérature et nous avons montré que la loi de Janda *et coll.* [2012] donnée par l'équation 2.23 dans le chapitre 2 prédit

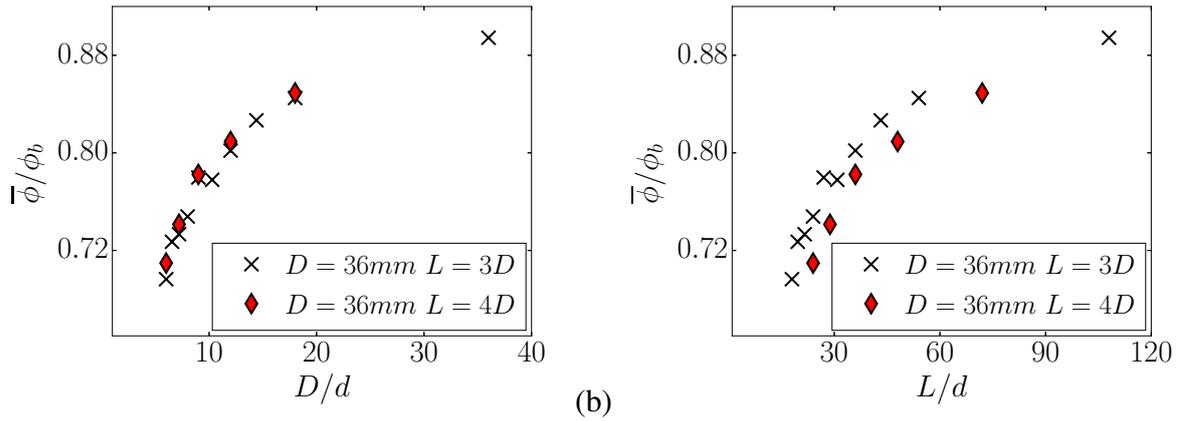


FIGURE 4.5 – Fraction volumique moyenne à la sortie adimensionnée par la fraction volumique initiale  $\phi_b$ , en fonction (a) de  $D/d$  et (b) de  $L/d$ .

bien le débit de vidange. Ainsi le débit montre une forte dépendance avec la taille de l’orifice et une dépendance plus faible avec la taille des particules qui provient principalement de la dilation des particules à la sortie lors de la vidange.

Grâce à la simulation discrète de la vidange d’un milieu bidisperse nous avons également montré que le milieu peut légitimement être considéré comme continu car les vitesses des particules à une position donnée sont les mêmes quelle que soit leur taille. Enfin l’approche de [Janda et coll. \[2012\]](#) permet de prédire le débit de vidange d’un tel milieu en supposant qu’il est continu et que chaque phase est représentée par sa fraction volumique.

Enfin, nous avons bien retrouvé le fait qu’une modélisation continue viscoplastique permet de prédire la loi de vidange d’un silo, pour des grands rapports  $D/d$ . Un travail intéressant en perspective serait d’implémenter la loi rhéologique  $\phi(I)$  dans la simulation continue pour savoir si elle est suffisante pour décrire la dilation observée à la sortie.

Dans la suite de cette thèse nous utiliserons l’équation de Janda 2.23 pour prédire le débit de vidange d’un silo ouvert. Dans le chapitre suivant nous nous intéressons à la vidange d’un silo élané possédant maintenant un orifice latéral.



# Chapitre 5

## Vidange d'un silo avec un orifice latéral

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la vidange d'un silo dans la géométrie d'intérêt, c'est à dire avec un orifice latéral, mais en restant dans le cas d'un silo ouvert. Comme précédemment nous avons mené cette étude avec les trois approches : l'expérience, la simulation continue, et la simulation discrète. L'objectif est d'étudier le rôle de la position et de la taille de l'orifice afin de proposer une loi de débit de vidange à l'instar de celle de [Janda et coll. \[2012\]](#) pour la vidange avec orifice inférieur. Ce chapitre a été rédigé sous la forme d'un article en préparation pour la revue *Journal of Fluid Mechanics*.

### 5.1 Plan de l'article

Après une introduction générale, nous présentons dans la section 2 les outils expérimentaux et numériques utilisés dans cette étude (qui sont aussi détaillés dans le chapitre 3). Dans la section 3 nous présentons les résultats des expériences pour une taille de particules donnée et les comparons à ceux de la simulation continue. Enfin la section 4 est consacrée à l'étude de l'influence de la taille des particules sur le débit avec une comparaison avec les résultats des simulations discrètes.

### 5.2 Copie de l'article

# Experiments, discrete and continuous simulations of the discharge flow of granular media from silos with lateral orifice: Crucial role of friction in silo discharge

Y. Zhou <sup>1,2</sup>, P.-Y. Lagrée <sup>3</sup>, S. Popinet <sup>3</sup>, P. Ruyer <sup>1</sup> and P. Aussillous <sup>2†</sup>

<sup>1</sup>Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire (IRSN), PSN-RES, SEMIA, LIMAR, Cadarache, St Paul-Lez-Durance, 13115, France

<sup>2</sup>Aix-Marseille Univ, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13013 Marseille, France

<sup>3</sup>Sorbonne Universités, UPMC Univ Paris 06, CNRS UMR 7190, Institut  $\partial'$ Alembert, F-75005 Paris, France

(Received xx; revised xx; accepted xx)

We compare laboratory experiments, contact dynamics simulations and continuum Navier-Stokes simulation with  $\mu(I)$  visco plastic rheology, of the discharge flow of granular media from a silo with a lateral orifice. We consider a rectangular silo with an orifice of height  $D$  which spans the silo width  $W$  and we observe two regimes of flow. For small aperture aspect ratio  $\mathcal{A} = D/W$ , the Hagen-Beverloo law is obtained. For shallow silos,  $\mathcal{A} > \mathcal{A}_c$ , we observe a second regime where the outlet velocity varies with  $\sqrt{gW}$ . This new regime is observed in the continuous simulation when the crucial role of sidewalls has been added in an depth-averaged version of  $\mu(I)$ -Navier-Stokes. Moreover most of the internal details of the flow field observed experimentally are reproduced when considering this lateral friction. These two regimes are recovered experimentally for a cylindrical silo with a lateral rectangular orifice of height  $D$  and arc length  $W$ . The dependance of the flow rate with the particle diameter is found to be correctly described experimentally using two geometrical functions based on the two aperture dimensions. A main part of this behaviour is well reproduced using a 2D discrete simulation where the geometrical function depending on the number of beads in the aperture is observed both for the volume fraction and the velocities at the outlet. Interestingly a similar dependance is observed in the 2D continuous simulation.

**Key words:**

---

## 1. Introduction

Discharge of granular media out of a silo through an aperure is a classical problem with many practical or industrial applications. The main scaling law, generally known as the Hagen-Beverloo law, predicts that the masse flow rate scales as  $(D - kd)^{5/2}$  where  $D$  is the diameter of the aperture,  $d$  the grain size and  $k$  an empirical parameter. But there are still open questions concerning the deep understanding of the physical process leading to such a scaling, *e.g.* Janda *et al.* (2012); Perge *et al.* (2012). Numerical simulations

† Email address for correspondence: pascalle.aussillous@univ-amu.fr

that explicitly solve the granular media at the scale of the particle, like discrete element methods, provide detailed and promising insight of the flow. But the relevant study of the granular media flowing out of a silo should rely on a rheological model for the flow at the scale of its opening. Such a model is still under development.

In this study, we are more particularly interested by a non-classical geometrical configuration of the reservoir containing the granular medium: a vertical and elongated cylindrical tube of diameter of the order of the cm with a lateral opening of the same order of magnitude. This case is of particular interest to understand under which conditions a set of nuclear solid fuel particles inside a typical PWR fuel rod, whose clad would have failed under hypothetical accidental conditions, could disperse out of this rod. The fuel particles are generated from an initially cylindrical pellet (scale of the *cm*) that can be fragmented with the irradiation process (burn-up of the fuel) or the accidental conditions (large pressure and temperature variations inside the rod). The size distribution of the fragments can be wide, the smallest size being of the order of ten  $\mu m$ . In this study the particles are idealized by a population of spherical beads and monodisperse in diameter. Therefore the inter-particles friction is as low as possible due to the small contact area between neighbouring particles. The discharge flow is therefore believed to overestimate the one of a more realistic granular material of the same average size. This granular reservoir has therefore two main specificities with regard to more classical hoppers geometries: first, for a given cross section of the flow, the perimeter over which wall friction occurs is relatively large (by analogy, one could talk of small hydraulic diameter) that raises the question of the possible impact of wall friction on the flow rate, secondly, the aperture is vertical, an orientation that necessarily impacts the discharge as a gravity-driven flow. Moreover, the number of beads through the aperture can vary over a large range and it is known to impact the flow rate for relatively low values.

The impact of the angle of the aperture surface with regard to the gravity on the discharge flow rate of a silo (a so-called tilted hopper) has been already studied experimentally. For beads, Sheldon & Durian (2010), or sand and sugar, Medina *et al.* (2014); Serrano *et al.* (2015) recovered the scaling of the flow rate with  $D^{5/2}$  as long as clogging does not occur (that is only slightly impacted by a vertical orientation of the aperture). According to the authors, the success of the Hagen-Beverloo law to scale the results in this configuration indicates that one of the classical physical interpretation of the law in terms of free-fall under an arch of aperture size is questionable. Shape and size of the aperture have been varied, but the size of the aperture were always small with regard to the silo width that does not cover our range of interest. The wall thickness of the silo can alter the discharge flow rate of titled hoppers as soon as it is sufficiently wide, Medina *et al.* (2014); Serrano *et al.* (2015). In these latter studies, the thickness is varied between 0 and approx. half the aperture size, the latter being always an order of magnitude larger than the typical grain size. For our case of interest, the typical clad of a nuclear fuel rod is less than a *mm* and the experimental facility has been designed to avoid any wall thickness impact on the discharge rate. In those study, the number of grains in the aperture has been varied solely by varying the aperture size, the grain size remaining constant. Sheldon & Durian (2010) also underlined the possible influence of the hoppers wall as being an interesting line for future research.

As long as the granular bed height inside the silo is larger than its width, the discharge flow rate does not depend on this height, a useful property for sandglasses applications. This has some similarity with the so-called Janssen effect that is observed for static packing of granular material confined by vertical walls. During the discharge, relative motion of the granular material with respect to these walls has to be considered and Bertho *et al.* (2003) have shown that Janssen effect can be recovered in this configuration.

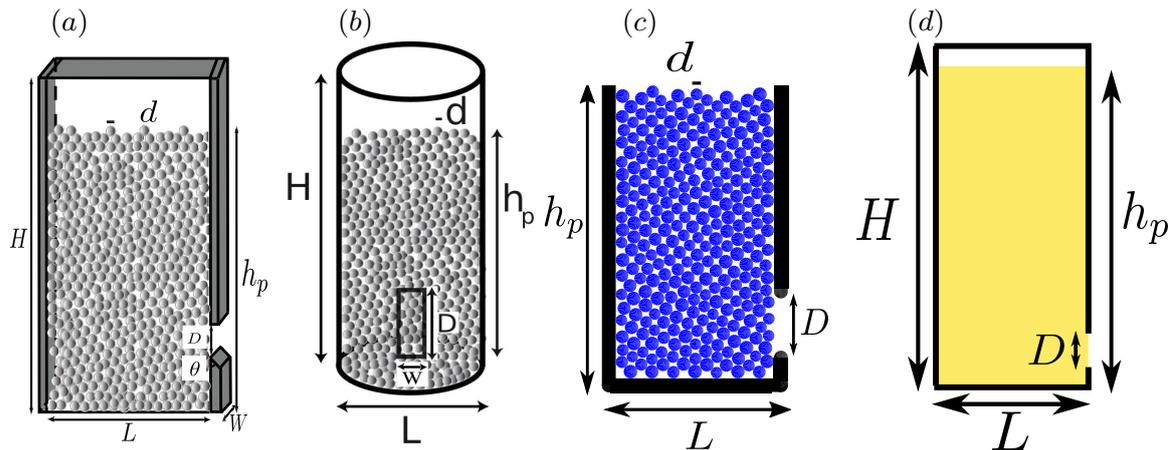


Figure 1: Schematic apparatus of the silo. (a) Experimental rectangular silo. (b) Experimental cylindrical silo. (c) 2D discrete simulation. (d) Continuous simulation

However, [Aguirre \*et al.\* \(2010\)](#) have shown that Janssen effect (*i.e.* the pressure level at the outlet) is not at stake with granular discharge flow. The frictional interaction of flowing granular material with walls and its possible influence on the discharge flow rate for our geometry is therefore an opening question.

As soon as the number of grains through the aperture is low, the flow rate depends on grains size (the larger the size, the lower the flow rate). The Hagen-Beverloo law catches this effect that modifies the flow rate as soon as  $D/d < k$ . One of the classical interpretation of this  $d$  dependency lies on the existence of an empty annulus that reduces the effective aperture area for the granular flow. But recent studies of the velocity and density profiles of the granular flow over horizontal apertures, *e.g.* [Janda \*et al.\* \(2012\)](#), indicate that the number of grains through the aperture is strongly correlated to the dilatancy of the flow over the whole flow cross section (and not only over its periphery). There is therefore interest in generalising this statement for other flow configuration where the Hagen-Beverloo law holds, like the case of vertical aperture of interest for this study.

In this study, we present an investigation of the discharge flow rate of a granular material of spherical glass beads of varied size confined in a vertical elongated silo of varied shape and size, with a lateral aperture of varied size and shape, neglecting the effect of its wall thickness. The methods used in the study are first introduced in section 2. The main scaling laws that could be deduced from dimensional analysis (see section 3.1) are recovered by the set of experiments performed (see section 3.2). It is then shown that the influence of the silo geometry on the flow rate can be simulated thanks to a continuous model for the granular flow with a rheology induced by a visco-plastic constitutive law (section 3.3). The observed influence of the beads size over the flow rate is analyzed in terms of dilatancy over the aperture flow cross section: experimental results tendencies are supported by contact dynamics simulations of the flow process across a vertical aperture (see section 4).

## 2. Methods

### 2.1. Experiments

Two geometries of silo have been considered: either rectangular or cylindrical as shown in figure 1(a,b). The typical height  $H$  of the silos is larger than  $500\text{mm}$  that is always one order of magnitude larger than its lateral extent. Its lateral extent, resp. diameter,

Table 1: Performed runs, the dimension are defined in figure 1.

	$D$	$W$	$d$
Exp. Rect. silo	[2.7 ; 5.4 ; 10 ; 15 20 ; 25 ; 30 ; 35 ] mm	[ 3.5 ; 5 ; 10 ; 20 30 ; 40 ] mm	[124 ; 190 ; 375 ; 538 762 ; 1129 ; 1347] $\mu m$
Exp. Cyl. silo	[5; 10 ; 20 ; 25 ; 30 35 ; 40 ; 41.5 ] mm	[5; 10.1; 15.4; 20.9 33.9; 62.8] mm	[124 ; 190 ; 375 ; 538 762 ; 1129 ; 1347] $\mu m$
Discrete 2D sim.	[ 6 ; 8 ; 10 ; 12 [ 14 ; 16 ; 18 ; 20 ] d	-	2 ; 6 mm
Continuous 2D sim.	[ 0.4375 ; 0.5 ; 0.5625 ; 0.625 0.6562 ; 0.6875 ; 0.75] L	-	$L/30$ ; $L/90$
Continuous Pseudo 3D sim.	[ 0.4375 ; 0.5 ; 0.5625 ; 0.5938 0.625 ; 0.6562 ; 0.6875 ; 0.75] L	[ 0.16 ; 0.2 ; 0.25 0.5 ; 1 ; 2 ] L	$L/30$ ; $L/90$

$L = 60\text{mm}$  (resp.  $40\text{mm}$ ) is fixed. The aperture on the lateral sidewall has a rectangular shape with a height  $D$  and a horizontal length  $W$ . For rectangular silos,  $W$  is also the width of the silo. For cylindrical silos,  $W$  is the orifice arc length. The whole set of geometrical data considered in this study is given in table 1. Back wall of the rectangular silo is made of a copper frame connected to ground to discharge static electricity. Front, bottom and lateral walls of the rectangular silo, as well as cylindrical wall are made of Plexiglas frame of  $mm$  width. The walls have been bevelled along the aperture with an angle  $\theta$  as represented in figure 1. A preliminary study has shown that the discharge flow-rate was independent of this angle (and therefore that the friction along the wall thickness was negligible) as long as  $\theta < 60^\circ$ , the value  $\theta = 30^\circ$  has been chosen. The bottom of the aperture is at a vertical distance larger than  $20\text{mm}$  from the bottom of the silo (at least 15 layers of beads): lower values affects the discharge rate.

The non-cohesive spherical glass beads of density  $\rho = 2500\text{kgm}^{-3}$  (Potter & Ballotini Inc.) have been sifted between  $0.9d$  and  $1.1d$ ,  $d$  being their mean diameter. The initial (before the opening of the aperture) volume fraction of particles in the silo  $\phi_b$  has been measured from the initial mass (of granular material before filling) and from the initial height  $h_p$  within the silo. During the discharge, the grains flowing through the aperture are collected and their mass is measured with an electronical balance (Mettler Toldeo 6002S) with an accuracy of  $0.1g$  and a frequency of  $20\text{Hz}$ . During the discharge, there exists a steady-state discharge regime for all the configurations explored. From the slope of the collected mass time evolution during this regime, one deduces the instantaneous mass flow rate  $Q_i$ , and the mean flow rate,  $Q$ , as can be seen in figure 2a. A Photron high-speed optical camera has been used during rectangular silo discharge with a spatial resolution of  $256 \times 1024$  pixels<sup>2</sup>, a frequency of acquisition of  $250\text{Hz}$  and a SIGMA zoom of focal length  $24 - 700\text{mm}$ . Using the software DPIVsoft, Meunier & Leweke (2003), we performed PIV of the granular flow and were able to get streamlines and 2D velocity fields at the front wall of the silo (as illustrated in figure 7). Using an interface tracking algorithm, the instantaneous profile of the upper layer of beads in the silo has also been recorded (as illustrated in figure 11).

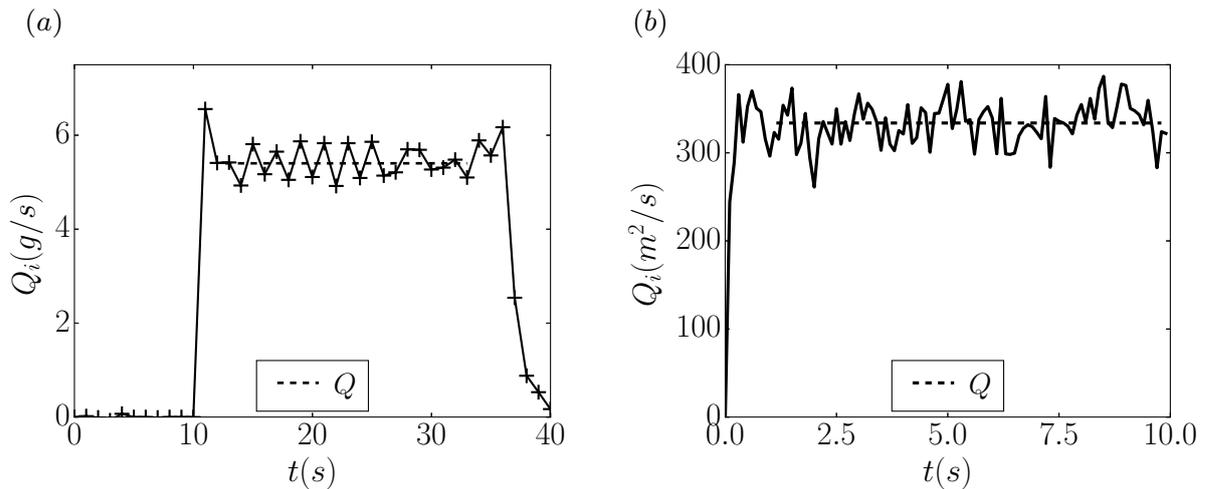


Figure 2: Temporal evolution of the instantaneous mass flow rate. (a) Experiment with rectangular silo,  $d = 190\mu\text{m}$ ,  $D = 10\text{mm}$  and  $W = 3.5\text{mm}$ . (b) 2D discrete simulation with  $d = 2\text{mm}$  and  $D = 16\text{mm}$ . The dashed lines represent the mean flow rate  $Q$ .

## 2.2. Contact Dynamics simulations

Following the work of [Zhou \*et al.\* \(2015\)](#) we used the LMGC 90 software implementation of the contact dynamics method ([Radjai & Dubois \(2011\)](#)) to study the discharge of a silo with a lateral orifice. As discrete simulations are too demanding in 3D we did only 2D simulations. The two-dimensional silo (figure 1c) consists of a rectangular reservoir, of width  $L$ , filled with an height  $h_p$  of particles of mean size  $d$ . There is a dispersion  $\delta d/d = 0.2$  in the size of the particles to avoid crystallisation. The wall thickness is imposed to be equal to  $d_M$ , the diameter of the biggest particle in the silo, with a circular shape at the edge of the outlet. The outlet is located at the side,  $3.5d_M$  above the bottom, and has a length  $D$  which was varied. The circular particles are treated as perfectly rigid and inelastic and contact dissipation is modelled in terms of a friction coefficient that we set to  $\mu_p = 0.4$  between particles and to  $\mu_w = 0.5$  between particles and the wall. The number of particles, reported in table 2, was chosen for each simulation to ensure that the discharge flow rate is independent of the column height with  $16D < H < 45D$ . To ensure that the lateral walls do not influence significantly the flow, we impose the width of silo  $L = 3D$ . The granular column is prepared by the random deposition of the particles in the closed silo. The initial volume fraction of particles in the silo  $\phi_b$  has been measured in the central zone of the silo. Then simulations are run with a time step of  $\delta t = 5 \cdot 10^{-4}$  sand for a number  $N_t$  of time steps reported in table 2. The computational domain is periodic in the vertical direction to keep constant the number of particles. The horizontal boundaries of the computational domain are set at a distance of  $10d_M$  below and  $30d_M$  to  $70d_M$  above the silo.

Figure 2b shows a typical temporal evolution of the instantaneous mass flow rate. The flow rate is found to rapidly reach a stationary value,  $Q$ . The output data at the aperture line are time averaged during this steady-state regime of discharge to deduce the vertical profiles of velocity and particle volume fraction. Further details may be found in [Zhou \*et al.\* \(2015\)](#).

## 2.3. Continuous numerical simulations

We turn to the continuous simulation methods in the framework of the  $\mu(I)$ -rheology, the non newtonian rheology proposed for granular flows [Midi \(2004\)](#); [Jop \*et al.\* \(2006\)](#). The Navier-Stokes simulations are performed with the free solver *Gerris* and its new version

Table 2: Parameters used in discret simulations for a fixed particle size ( $d = 2$  mm and  $d = 6$  mm), where  $N_p$  is the number of particles and  $N_t$  is the number of time steps.

$d = 2\text{mm}$    $d = 6\text{mm}$				
$D/d$	$N_p$	$N_t$	$N_p$	$N_t$
6	5000	30000	4000	30600
8	7500	20000	5400	22000
10	10000	20000	8400	20000
12	11290	16000	12000	20000
14	13500	15000	14000	16000
16	15500	10000	16000	9200
18	20000	5200	18000	8000
20			20000	6000

*Basilisk* under development. They both use finite volume, projection methods. As two phases are present, namely a passive surrounding gas and the granular fluid itself, a Volume of Fluid method is used to track the interface. *Basilisk* allows for a resolution of the fully-coupled Poisson–Helmholtz problem (the former code solved dimension by dimension). The simulations are in 2D. The non Newtonian incompressible Navier Stokes system reads:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{u}^p = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{d\underline{u}^p}{dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{g} + \underline{f}_w, \quad (2.2)$$

$$\underline{\sigma} = -p\underline{I} + 2\eta\underline{D} \quad \text{with} \quad \underline{D} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{u}^p + \underline{\nabla}\underline{u}^{pT}), \quad (2.3)$$

where  $\underline{f}_w$  is a volume force source. Following Jop *et al.* (2006) the granular media is modelled as a visco-plastic fluid with a viscosity  $\eta$  depending both on the shear-rate and the local pressure:

$$\eta = \frac{\mu(I)p}{\sqrt{2}D_2}, \quad \text{with } I = \frac{d\sqrt{2}D_2}{\sqrt{p/\rho}}, \quad \mu(I) = \mu_s + \frac{\Delta\mu}{I_0/I + 1}, \quad \text{and} \quad D_2 = \sqrt{\underline{D} : \underline{D}}. \quad (2.4)$$

We took for the rheological constants  $\mu_s = 0.4$ ,  $\Delta\mu = 0.28$  and  $I_0 = 0.4$ , but we do not considered the variation of the volume fraction with  $I$  given by Jop *et al.* (2006). We used a regularisation technique to avoid the viscosity to diverge when the shear becomes too small by replacing  $\eta$  by  $\min(\eta, \eta_{max})$  with  $\eta_{max} = 100$  a constant large enough, as done successfully in Lagr ee *et al.* (2011) and Staron *et al.* (2012, 2014) where further details on the numerical method can be found. We consider a two-dimensional silo of width  $L$ , initially filled with a height  $h_p = 3.9L$  of the visco-plastic fluid (see figure 1d). At the solid boundaries we imposed a no slip condition. The width of silo  $L$  is divided in 64 computation cells.

We first performed a series of simulations in the two-dimensional case, imposing  $\underline{f}_w = 0$ . We varied the size of the aperture  $D$  and the particle diameters (see table 1). In figure 3a, the instantaneous flow rate obtained for a given run,  $Q_i^{2D}$ , is found to be rather stationary during the discharge as in the experiments. As done in the experiments,

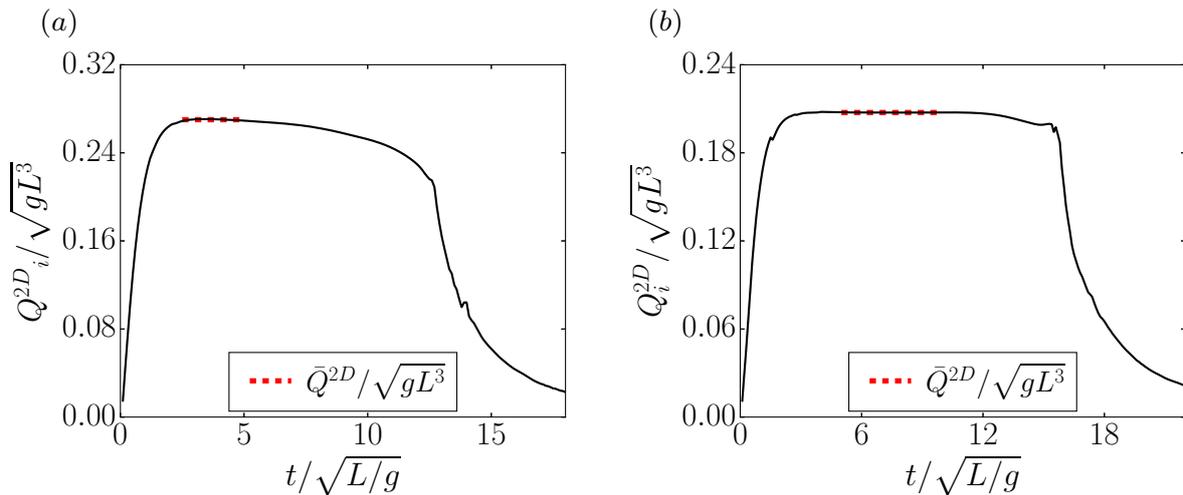


Figure 3: Continuous simulation : temporal evolution of the dimensionless instantaneous flow rate  $Q_i^{2D}/(\sqrt{gL^3})$  as a function of the dimensionless time  $t/\sqrt{L/g}$  for  $L = 90d$  and  $D = 0.5L$  (a) in 2D (b) in pseudo 3D with  $W = 22.5d$ . The dashed lines represent the mean flow rate  $\bar{Q}^{2D}/(\sqrt{gL^3})$ .

we measure the mean flow rate,  $Q^{2D}$ , on the stationary regime (see the dashed lines in the figure).

Then to take into account the lateral friction on the walls and mimic 3D effects, we averaged the momentum equation across the width of the silo in the Hele-Shaw spirit, [Jop et al. \(2005\)](#). This adds an averaged additional force from the sidewalls in the momentum equation,

$$\underline{f}_w = -2(\mu_w p/W)(\underline{u}^p/|\underline{u}^p|) \quad (2.5)$$

We chose the value  $\mu_w = 0.1$  and varied the pseudo width,  $W$ , together with the aperture length,  $D$ , and the particle diameter,  $d$ , as shown in table 1. In this pseudo 3D simulation, the different field (velocities, pressure) are now equivalent to be depth averaged in the width of the silo. Again, in figure 3b, the instantaneous flow rate is found to be stationary during the discharge. We measured the mean flow rate,  $Q^{2D}$ , on the stationary regime (see the dashed lines in the figure) and we defined the equivalent 3D flow rate as  $Q = WQ^{2D}$ .

Note that when the force exerted by the friction at the wall,  $\underline{f}_w$ , is too large, the numerical continuous simulations fail. The numerical method is not designed to such a large source term. Extra developments have to be done, nonetheless the range covered on  $W$  is sufficient to compare qualitatively the results of the simulation with the experiments.

### 3. Effect of sidewalls on the silo discharge flow from a lateral orifice

The aim of this study is to clarify the role of the two dimensions of the outlet, the height  $D$  and the width  $W$  as defined in figure 1, in the discharge flow of a silo from a lateral aperture. In a first part we have simplified the problem considering a rectangular silo where the orifice spans the width of the silo. We present the experimental results, then we discuss the role of the sidewalls on the flow rate using continuous simulations. Finally in a last part we extend the result to the cylindrical silo.

#### 3.1. $\Pi$ -theorem

The mass flow rate out of the silo,  $Q$  depends on the density  $\rho$ , the gravity field  $g$  and the geometrical parameters: width  $L$ , orifice height  $D$ , thickness  $W$ , the filling height

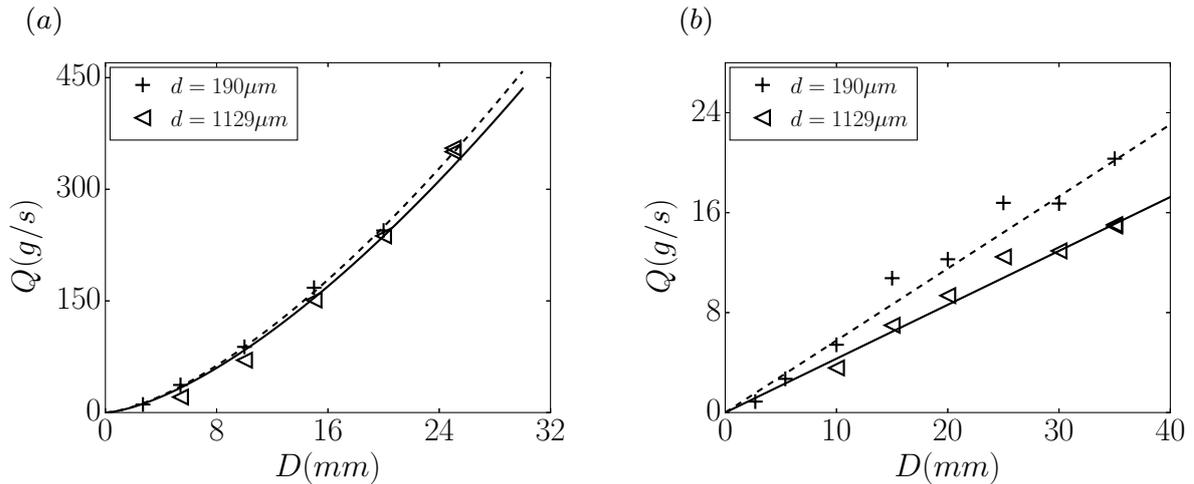


Figure 4: Experimental mass flow rate  $Q$  in the rectangular silo versus the height of orifice  $D$  for two sizes of particles  $d$ : (a)  $W = 40$  mm, the dashed (resp. full) line represents the equation  $Q = c_1 D^{3/2}$  where  $c_1 = 2.79 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}\text{mm}^{-3/2}$  (resp.  $c_1 = 2.65 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}\text{mm}^{-3/2}$ ) is obtained using the method of least squares. (b)  $W = 3.5$  mm, the dashed (resp. full) line represents the equation  $Q = c_2 D$  where  $c_2 = 0.58 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}\text{mm}^{-1}$  (resp.  $c_2 = 0.43 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1}\text{mm}^{-1}$ ) is obtained using the method of least squares.

$h_p$  and the grain size  $d$ . Standard application of dimensional analysis or  $\Pi$ -theorem gives us the relation between non dimensional numbers. It is straightforward first, that the flux scales with  $\rho \ell^2 \sqrt{g\ell}$  where  $\ell$  is any of  $D, W, h_p, d$  (and  $\ell^2 \sqrt{\ell}$  any combination of these lengths), and second, that this flux is function of any ratio combination, say  $D/W, d/D, h_p/W, L/D$ . Common experimental knowledge on silos shows that the flux is independent of the width  $L$  (if large enough), of the filling height  $h_p$  (if large enough), and of the grain size  $d$  (if small enough). We can therefore remove the afferent ratios. This reduces to  $Q/(\rho \ell^2 \sqrt{g\ell})$  (where  $\ell$  is any of  $D, W$ ) as being a function of the aperture aspect ratio  $\mathcal{A} = D/W$ .

If  $W$  is large, the problem becomes bidimensional and  $D/W$  has no more influence. Then, the velocity scales with  $\sqrt{gD}$ , the size of the aperture being scaled by  $D$ , and the flux by transverse unit  $Q/W$  is  $\rho D \sqrt{gD}$ . This gives the equivalent for this rectangular geometry of the famous Hagen-Bergerloo law (see a translation of the original article of Hagen in Tighe & Sperl (2007), Beverloo et al. (1961)):

$$Q \propto W \rho \phi_b D \sqrt{gD} \quad (3.1)$$

This scaling law was recovered experimentally for a bottom aperture, spanning the width of a rectangular silo, by several authors as in Choi et al. (2005); Benyamine et al. (2014). This behaviour is also observed in our experimental set-up with a side aperture. It can be seen in figure 4a where the flow rate is plotted as a function of the outlet length  $D$  for two particles diameter, for the larger silo thickness  $W = 40$  mm. For a given particle diameter, the data are well adjusted by equation 3.1, see respectively the full line and the dashed line in the figure. Therefore, following the  $\Pi$ -theorem, the relevant normalisation for the flow rate seems to be  $\rho \sqrt{gW^5}$ , giving for the former relationship

$$\frac{Q}{\rho \phi_b \sqrt{gW^5}} = c_D \left( \frac{D}{W} \right)^{3/2}. \quad (3.2)$$

In the following section this scaling will be confronted to the data obtained in the rectangular silo.

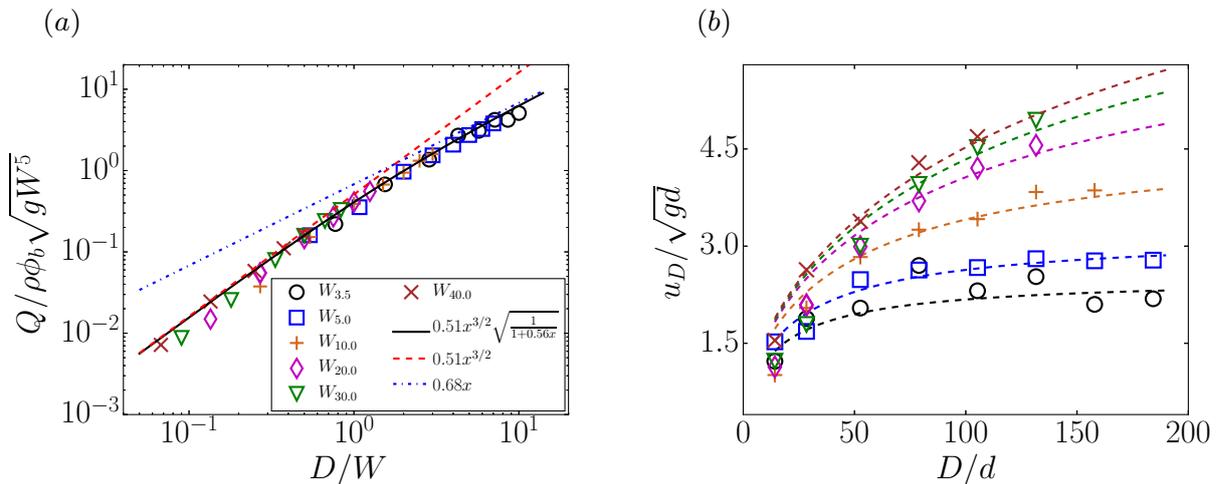


Figure 5: Experiments in the rectangular silo for a given particle diameter  $d = 190\mu\text{m}$  and various silo widths,  $W$ , (a) dimensionless mass flow rate  $Q/(\rho\phi_b\sqrt{gW^5})$  as a function of  $D/W$ . The dashed line represents equation 3.2 with  $c_D = 0.51$ , the dashed-dotted line represents equation 3.3 with  $c_W = 0.68$  and the solid line represents equation 3.4 with the same parameters. (b) Corresponding dimensionless discharge velocity  $u_D/\sqrt{gd}$  as a function of  $D/d$ . The dashed lines represent equation 3.5 with the same parameters.

### 3.2. Experimental results in the rectangular silo

Figure 5a represents the dimensionless flow rate  $Q_A = Q/(\rho\sqrt{gW^5})$  versus the aperture aspect ratio  $\mathcal{A} = D/W$ , for various thicknesses  $W$  and lengths  $D$  of the orifice and for a given diameter of particle  $d = 190\mu\text{m}$ . In this representation, the data collapse as suggested by the  $\Pi$ -theorem. As expected, for large thicknesses ( $D/W \ll 1$ ),  $Q_A$  follows a power law with an exponent  $3/2$  corresponding to the Hagen-Beverloo law (equation 3.2), see the dashed line in the figure. But, in increasing  $D/W$ , the striking experimental result is that when the silo thickness is small enough, the dimensionless flow rate of particles depends now linearly on the aperture aspect ratio (see the dashed-dotted line in the figure 5a):

$$\frac{Q}{\rho\phi_b\sqrt{gW^5}} = c_W \frac{D}{W}. \quad (3.3)$$

This can be also seen in figure 4b where the flow rate is plotted versus the aperture length  $D$  for the shorter thickness explored,  $W = 3.5$  mm, and for two particles diameters,  $d$ . For a given particle diameter, the flow rate indeed exhibits a linear trend  $Q \propto D$ . The transition between these two regimes occurs around a specific aperture ratio  $\mathcal{A}_c \approx 2$ . According to these two asymptotical regimes, we can thus propose a fitting law for the flow rate:

$$\frac{Q}{\rho\phi_b\sqrt{gW^5}} = c_D \left(\frac{D}{W}\right)^{3/2} \sqrt{\frac{1}{1 + (c_D/c_W)^2 D/W}}. \quad (3.4)$$

As can be seen in figure 5a, this law corresponding to the solid line describes well the flow rate dependence on the aperture dimensions in any regime with the fitting parameters  $c_D = 0.51$  and  $c_W = 0.68$ .

These two regimes can be interpreted in term of the (horizontal) discharge velocity

$u_D = Q/\rho\phi_b WD$ , which can be expressed using equation 3.4 as following,

$$u_D = c_D \sqrt{gD} \sqrt{\frac{1}{1 + (c_D/c_W)^2 D/W}}. \quad (3.5)$$

Again, this law adjusts really well the data whatever the silo width as can be seen in figure 5b (see the dashed lines). Then the first regime corresponds to the classical Hagen-Beverloo law with a velocity which scales with the aperture length:

$$(D/W) < \mathcal{A}_c, \quad u_D = c_D \sqrt{gD} \quad (3.6)$$

Whereas in the second regime the discharge velocity now scales with the aperture width:

$$(D/W) > \mathcal{A}_c, \quad u_D = c_W \sqrt{gW} \quad (3.7)$$

Historically, the Hagen-Beverloo law was explained with the concept of a “free-fall arch” located at the outlet, from which the particles fall freely. Several recent experiments and numerical simulations question this hypothesis. On an experimental point of view, Janda *et al.* (2012); Rubio-Largo *et al.* (2015) have shown that the granular media stay dense, with a small dilation, close to the outlet and that the particles do not undergo a free fall. These observations were validated using discrete simulation Rubio-Largo *et al.* (2015). Moreover Navier Stokes simulations, supposing a continuous frictional rheology of the granular media, have been successfully used to recover the Hagen-Beverloo scaling as in Davier & Bertails-Descoubes (2016); Dunatunga & Kamrin (2015); Staron *et al.* (2012, 2014), with slightly different numerical methods.

The fact that we recover the Hagen-Beverloo law with a vertical aperture tends also to refute this concept, as pointed is out by Sheldon & Durian (2010). Based on these observations, we performed a continuous simulation, using a Navier Stokes solver with the granular rheology, to test whether we can reproduce at least qualitatively the experimental behaviours.

### 3.3. Comparison with the continuous numerical simulations

We first performed continuous numerical simulation in the 2D case. To compare with the experimental results, we have plotted in figure 6a the dimensionless flow rate  $Q_{\mathcal{A}} = Q/(\sqrt{gW^5})$  versus the aperture aspect ratio  $\mathcal{A} = D/W$ , by using the same series of data but rescaled several times with each width  $W$  used for the pseudo-3D simulations. In pure bidimensional flow (red circles), the Navier Stokes simulations recover the Hagen-Beverloo scaling, equation 3.2 (dashed line). This suggests that the visco-plastic fluid rheology contains all the necessary ingredients to describe the discharge flow of a silo with a side-located aperture.

Then, to mimic the effects of the lateral walls, we added the term of friction proportional to the pressure and aligned with the velocity, equation 2.5, and we varied the pseudo width  $W$  (see the different symbols in figure 6a). We first notice that when the aperture ratio is small  $\mathcal{A} = D/W$ , similarly to the experimental case, the data of the pseudo-3D simulations are superimposed with the 2D simulations and we recover the Hagen-Beverloo scaling, equation 3.2. Then increasing the aperture ratio, we observe a departure from this scaling towards a regime where  $Q_{\mathcal{A}} \propto \mathcal{A}$ , see the dashed-dotted line. We can see that we do not completely reach this regime due to the numerical upper limit of achievable values for  $f_w$ , however the data are well adjusted by equation 3.4 with  $c_D = 0.76$  and  $c_W = 1.49$  (see the solid line).

Following the experimental section, the dimensionless mean horizontal velocity at the outlet,  $\bar{u}/\sqrt{dg}$ , is plotted versus the dimensionless outlet length  $D/d$  in figure 6b. We

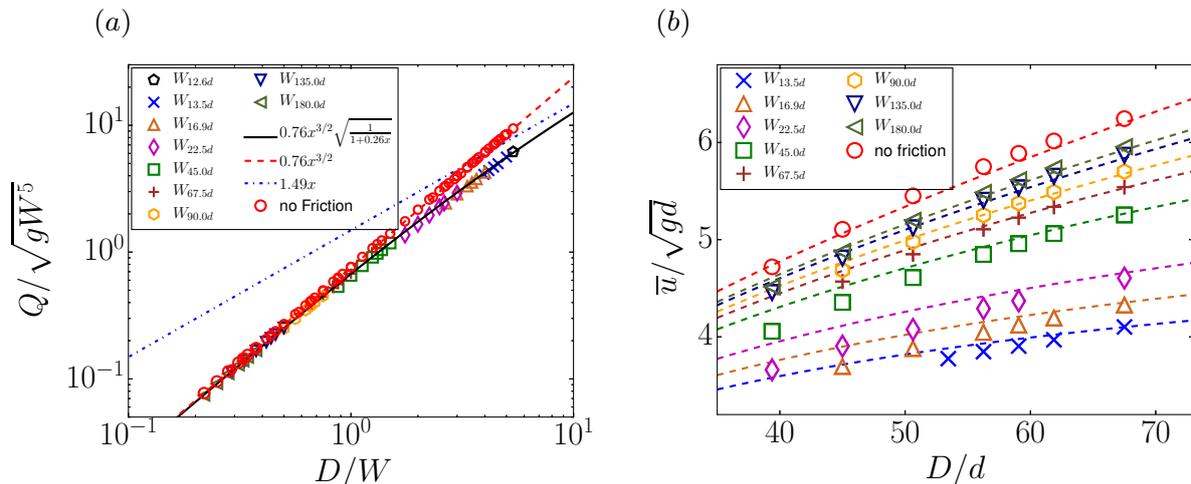


Figure 6: Continuous simulations in 2D and in pseudo 3D for various  $W$  with  $H = 360d$ ,  $L = 90d$  and  $D = 45d$ . (a) Flow rate  $Q$  normalized by  $\sqrt{gW^5}$  as a function of  $D/W$ . The dashed line represents equation 3.2 with  $c_D = 0.76$ , the dashed-dotted line represents equation 3.3 with  $c_W = 1.49$  and the solid line represents equation 3.4 with the same parameters. (b) Mean horizontal velocity at the orifice  $\bar{u}/\sqrt{gd}$  as a function of  $D/d$ . The dashed lines represent equation 3.5 with the same parameters.

observe the same trends than for the experimental data : in the regime controlled by the outlet length,  $D$ , the velocity tends toward the Hagen-Beverloo scaling (equation 3.6 and 2D data) whereas when the ratio  $\mathcal{A}$  increases, the velocity tends toward the regime controlled by the silo width given by equation 3.7. Again each series of data for a given  $W$  are fairly adjusted by equation 3.5 (see the dashed lines).

In the continuous simulation, the width of the silo appears only in the term describing the sidewall friction, which suggests that the second regime is controlled by this term. It is interesting to note that in the regime dominated by the lateral friction the flow rate by unit length at a given  $D$  is lower than in the first regime. Even if we do not achieved to reach fully the second regime ( $\mathcal{A} \gg 1$ ), we go further away in the analysis and present some comparisons of the details of the internal fields at the limit of the numerical model.

Figure 7 shows the velocity field and the streamlines of both the experimental and the numerical runs for increasing silo width. The numerical velocity field (figure 7b) is qualitatively very similar to the experimental velocity field (figure 7a). In both configurations, the streamlines tend to vertical lines upward the orifice at a distance which decreases when  $W$  increases. On the same figures, we observe that the flowing zone is found to be thinner when the lateral friction increases (i.e. when  $W$  decreases). The limit of the stagnant zone for various outlet size  $D$  is plotted in figure 8 both for the experiment (a) and the continuous simulation (b) in the regime dominated by the lateral friction. Interestingly, this position does not depend on  $D$  in both cases, whereas it depends strongly on  $W$ .

We may explain as follows these behaviours at small  $W$  in looking back at the Navier Stokes equation. Let us consider at a steady flow (or neglect inertia). As the friction at the walls increases when  $W$  decreases, the friction term (of magnitude  $\mu_w p/W$ ) will be at most as large as gravity ( $\rho g$ ). Gradients of the stress tensor are of order of magnitude of  $\mu_s p/L$ . This order of magnitude may be rewritten as  $(\mu_s/\mu_w)(W/L)\mu_w p/W$ . It is clearly smaller than  $\mu_w p/W$  as  $(\mu_s/\mu_w) = O(1)$  and  $(W/L) \ll 1$ . Hence, as the wall friction

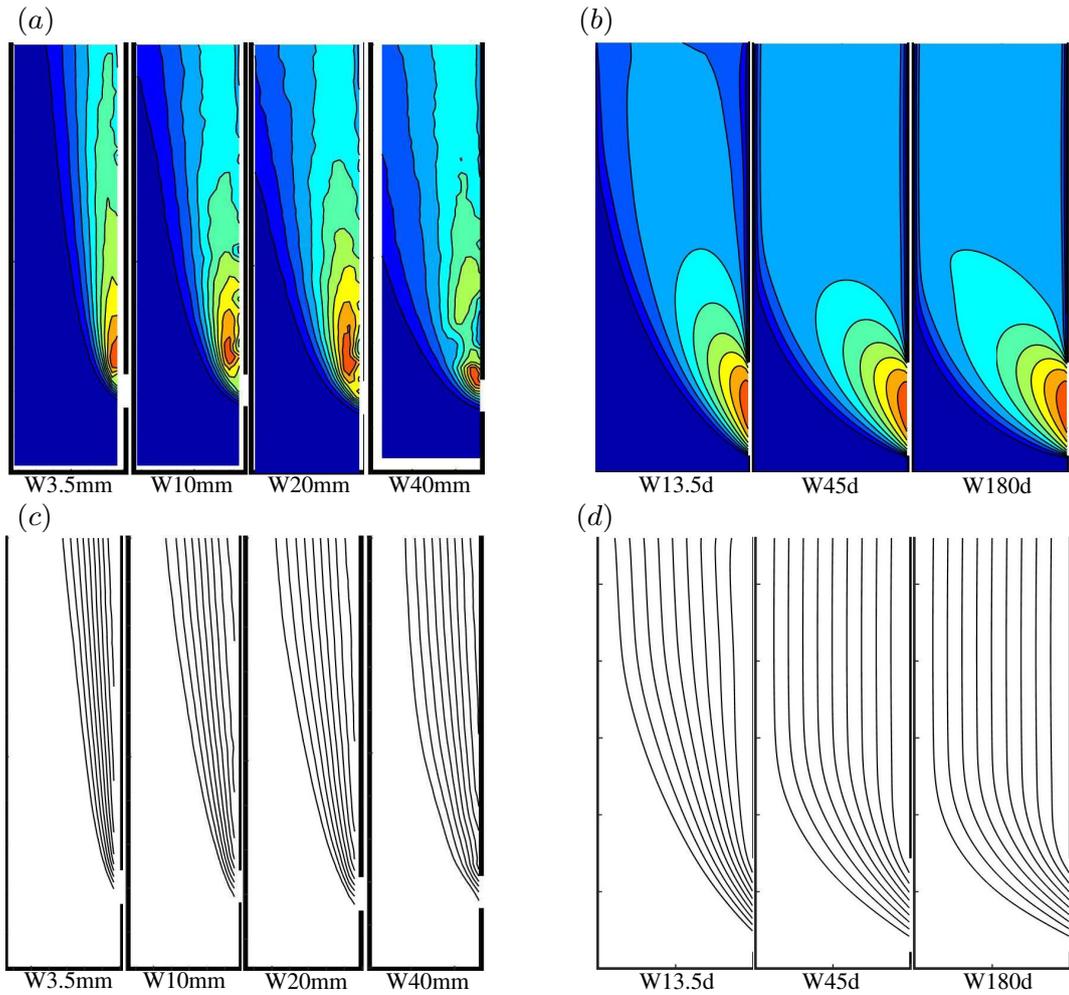


Figure 7: Velocity field (a,b) and streamlines (c,d) for the experiment (a,c) with  $D = 20\text{mm}$ ,  $d = 1129\mu\text{m}$  and  $W = [3.5, 10, 20, 40]\text{mm}$ , and for the continuous simulation (b,d) with  $D = 56.25d$  and  $W = [13.5d, 45d, 180d]$ .

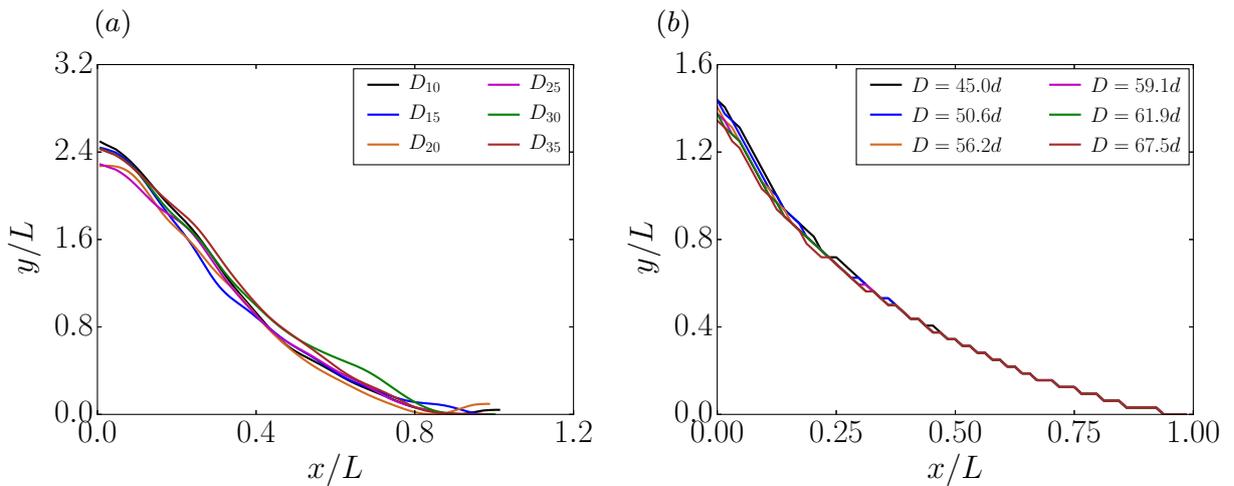


Figure 8: Limit of the stagnant zone for various  $D$  (a) experiments with  $W = 5\text{mm}$  and (b) continuous simulations with  $W = 17.4d$ .

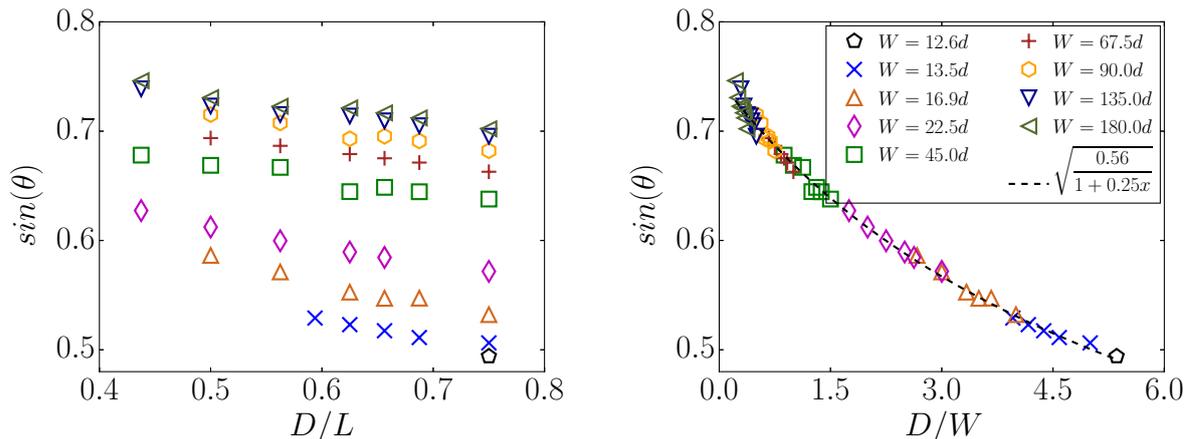


Figure 9: Continuous simulation : angle of inclination  $\theta$  of the central streamline at the orifice relatively to the vertical for various  $W$  (a) versus  $D/L$ , (b) versus  $D/W$ . The dashed line represent equation 3.8 with  $\gamma_1 = 0.56$  and  $\gamma_2 = 0.25$ .

increases up to balance the gravity, the momentum equation is approximated as:

$$0 \simeq \frac{2\mu_w p}{W} O\left(\frac{\mu_s W}{\mu_w L}\right) + \rho \underline{g} - \frac{2\mu_w p}{W} \frac{\underline{u}^p}{|\underline{u}^p|}.$$

The velocity is aligned with gravity at first order: the smaller the thickness, the more the velocity is aligned with gravity. This is noticeable in figure 7(c,d) where for small  $W$  the streamlines are clearly more aligned with the gravity field than for larger  $W$ . To quantify this effect, we have plotted in figure 9 the angle of inclination  $\theta$  of the central streamline at the orifice relatively to the vertical.

We observe in figure 9a that this angle decreases slightly with  $D$ , and strongly with  $W$  as we expected. More interestingly, if plotted versus  $D/W$  (figure 9b) the data superimposes and can be well adjusted by

$$\sin(\theta) = \sqrt{\frac{\gamma_1}{1 + \gamma_2 D/W}}. \quad (3.8)$$

with  $\gamma_1 = 0.56$  and  $\gamma_2 = 0.25$ . If we note  $u_0$  the horizontal velocity at the center of the outlet, and  $U_0$  the norm of the velocity at this position, we can write  $u_0 = U_0 \sin(\theta)$ . Since the flow rate  $Q \propto u_0 W D$ , we then turn to the dependance of the norm of velocity  $U_0$  on  $W$  and  $D$ . In figure 10 we have represented the norm of the velocity  $U_0/\sqrt{gd}$  on the central streamline at the orifice versus  $D/d$  for various  $W$ . Surprisingly, we can see that the norm of the velocity does not depend significantly on  $W$ . The data can be adjusted by

$$U_0 = c_U \sqrt{gD}. \quad (3.9)$$

with  $c_U = 1.2$ . This suggests that the kinetic always scales with  $\rho g$  whatever the lateral friction. We then recover the same form as equation 3.5 for the horizontal velocity, with the fitting parameter  $\gamma_2 = 0.25$  corresponding to  $(c_D/c_W)^2 = 0.26$ .

Finally figure 11 shows the time evolution of the top surface of granular materials for various silo width for (a) the experiment and (b) the continuous simulation. From experiments we can see that the surface of particles starts to tilt in the early stage for small width  $W$  whereas it remains constant until the last stage for largest  $W$ . The tilted interface exhibits a slope starting from the wall opposite to the outlet and reaches a flatten surface, or sometimes even a small increase, on the wall containing the outlet. The slope of the interface is higher than the angle of repose for  $W = 3.5\text{mm}$ , and smaller

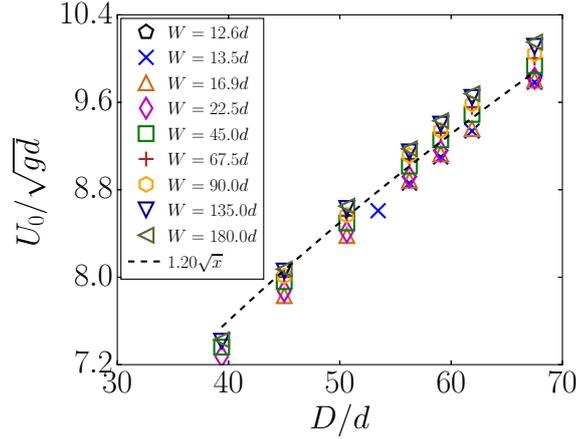


Figure 10: Continuous simulation : norm of the velocity  $U_0/\sqrt{gd}$  on the central streamline at the orifice versus  $D/d$  for various  $W$ . The dashed line represent equation 3.9 with  $c_U = 1.2$ .

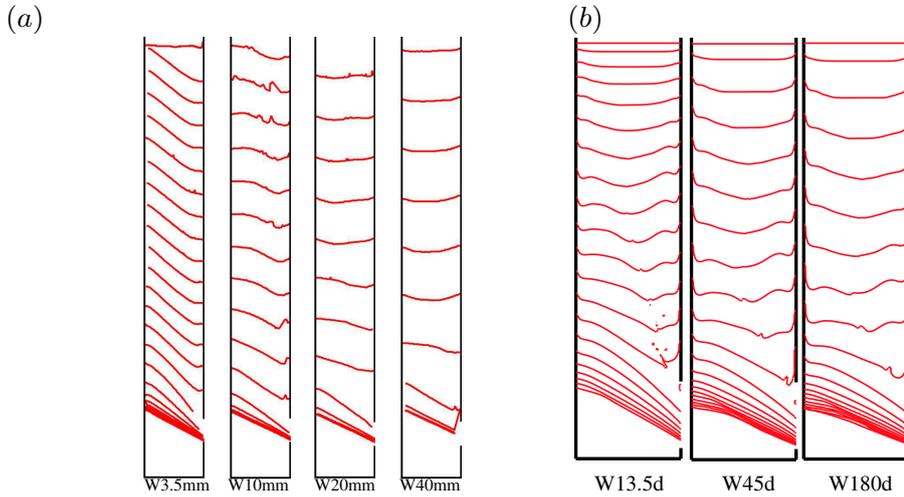


Figure 11: Profiles of the top surface of granular materials for various  $W$  at constant time steps (a) experiments with  $D = 25\text{mm}$ ,  $d = 190\mu\text{m}$ ,  $\Delta t_e = 0.5\text{s}$  (b) continuous simulation with  $D = 56.25d$  and  $\Delta \bar{t}_s = 9.5$ .

than the angle of repose for  $W = 10\text{mm}$ . In continuous simulation, we explored a shorter range of  $W$ , the smallest  $W$  case in continuous simulation  $W = 13.5d$  is comparable to the case  $W = 20\text{mm}$  in experiment, but we clearly recovered the same trend: the larger the thickness  $W$ , the longer the interface remains symmetrical. Note also that the no slip conditions imposed at the wall are not exactly the same than in the experiments, where a sliding velocity is observed. Nevertheless the same qualitative profiles are observed. This behaviour is consistent with the previous observation: for large  $W$  the flow far from the outlet is symmetrical. For small  $W$ , the lateral friction breaks this symmetry and localised the flow on the side of the outlet, which inclines the surface in this direction.

### 3.4. Experimental results in the cylindrical silo

The previous results were given for a simplified geometry, with a rectangular silo and an outlet which spans the width of the silo. Experimentally we also performed measurement of the flow rate from a cylindrical silo, with an outlet located on its side as schematised in figure 1b. This situation of practical interest generates a flow in a fully

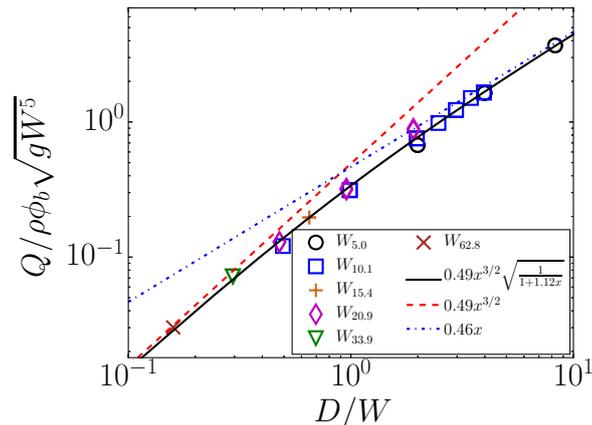


Figure 12: Experiments in the cylindrical silo, dimensionless mass flow rate  $Q/(\rho\phi_b\sqrt{gW^5})$  as a function of the aperture aspect ratio  $D/W$ . The dashed line represents equation 3.2 with  $c_D = 0.49$  and the dashed-dotted line represents equation 3.3 with  $c_W = 0.46$ .

3D complex geometry. To characterise the different roles played by the length  $D$  and the width  $W$  of the outlet, we have plotted in figure 12 the dimensionless mass flow rate  $Q/(\rho\phi_b\sqrt{gW^5})$  as a function of the aperture aspect ratio  $D/W$  as done in the rectangular configuration.

As suggested by the  $\Pi$ -theorem in section 3.1 the data superimpose in this representation. Moreover we observe the same behaviours than in rectangular silo. For large  $W$ , the flow rate follows the Hagen-Beverloo law (equation 3.2, dashed line in the figure) and for small  $W$ , the flow rate follows equation 3.3 (dashed-dotted line in the figure) suggesting that the flow is dominated by the lateral friction. On the whole range the data are well correlated by equation 3.4 (solid line in the figure) with  $c_D = 0.49$  and  $c_W = 0.46$ . The fitting parameters  $c_w$  is found to be slightly smaller than in the rectangular silo. This suggests that the dissipation is higher in the cylinder, and more especially in the regime controlled by the lateral friction where we can suppose that the friction with a smooth lateral wall is smaller than with an erodible granular media. Consequently the transition between the two regimes occurs for a smaller aperture aspect ratio  $\mathcal{A}_c \approx 1$ .

To conclude this section, we have observed experimentally two regimes of discharge for a silo with a lateral aperture both in the rectangular and in the cylindrical geometry. The continuous simulation, using the frictional  $\mu(I)$  rheology and solved in 2D with an additional force to take into account the wall friction, is found to describe correctly these two regimes as well as most of the internal details of the flow field observed experimentally in the rectangular silo. The dependance on the silo width suggests that the small  $W$  regime is dominated by the lateral friction, and it seems reasonable to think that the large  $W$  regime is controlled by the friction on the vertical plane. Interestingly, the kinetic energy at the outlet always scales with the aperture height  $D$ . The ability of the velocity field to align with gravity is affected by the lateral friction. This seems to explain most of the internal details of the flow. The single variation with  $D/W$  of the inclination of the velocity field carries the observed variation of regimes for the effective horizontal flowrate out of the silo. Finally, we propose an empirical law which predicts the flow rate depending on the aperture dimensions.

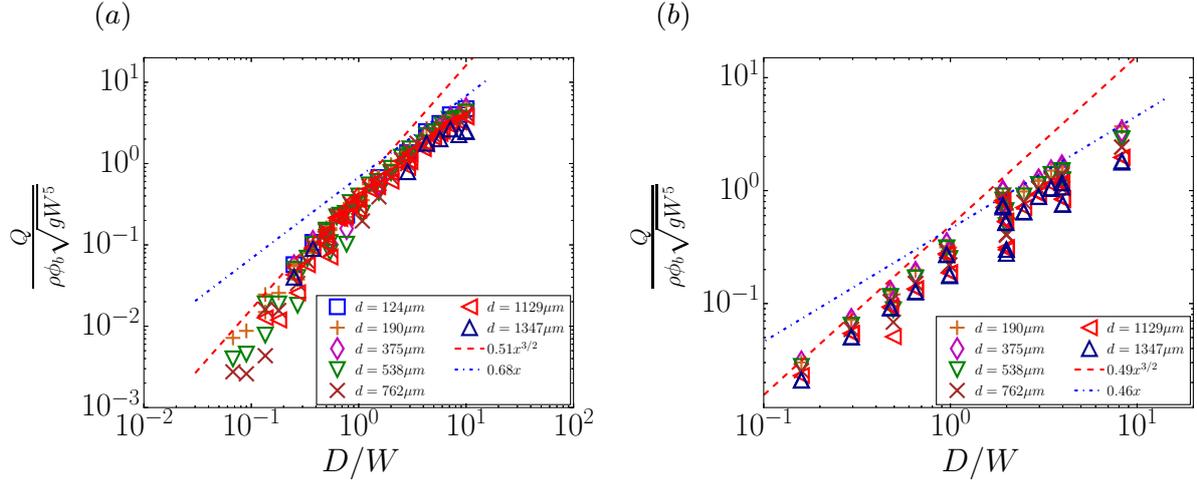


Figure 13: Mass flow rate  $Q/(\rho\phi_b\sqrt{gW^5})$  as a function of  $D/W$  for various  $d$  for (a) rectangular silos and (b) cylindrical silos. The dashed and dashed-dotted lines are the same than in figure 5 and 12.

#### 4. Dependence of the flow rate on the particles diameter

The previous results are shown for a given small particle diameter  $d = 190\mu\text{m}$ . In this section we focus on the influence of the particle diameter. We present first the experimental results, then we discuss the role of the particle diameter on the flow close to the outlet using 2D Contact Dynamics simulations. Finally in a last part we compare these results to the 2D continuous numerical simulations.

##### 4.1. Experimental results and discussion

In the previous part, we have shown that the flow rate of discharge of a silo with a lateral outlet depends on the aperture aspect ratio  $\mathcal{A} = D/W$  and exhibits two regimes of flow described by equation 3.2 for small  $\mathcal{A}$  and by equation 3.3 for large  $\mathcal{A}$ . When the particles diameter is varied, these scaling laws seem to remain valid, as can be seen in figures 4(a,b) where the flow rate is plotted versus  $D$  for two particles diameters  $d = 190\mu\text{m}$  and  $d = 1129\mu\text{m}$  in the two regimes. In each regime the same scaling is found for the two grain size, however we observe a shift of these laws towards smaller flow rates when the particle diameter increases. This behaviour can be seen in figure 13 where the dimensionless flow rate  $Q_A = Q/\rho\phi_b\sqrt{gW^5}$  is plotted as a function of  $D/W$  for both the rectangular silos and the cylindrical silo for all the batch of particles we used. Roughly the two regimes are recover whatever the particle diameter, see the dashed line and the dashed-dotted line. However there is a significant scattering of the data above the law fitted for the smallest particle size  $d = 190\mu\text{m}$ . To take into account the dependance on the particle diameters, we suppose that the observations made experimentally by Janda et al. (2012) and numerically by Zhou et al. (2015) on a two dimensional silo with an orifice placed at the bottom of the silo stay valid in our geometry. Then we made the following assumptions:

(i) We suppose that the horizontal velocity profile together with the density profile at the outlet are self-similar when varying the length of the hole  $R = D/2$ . The flow rate is then given by

$$Q = \rho W \iint_{-R}^R \phi(y)u(y)dy = c\rho W D \bar{\phi} \bar{u}. \quad (4.1)$$

where  $c$  is a constant of integration and  $\bar{\phi}$  and  $\bar{u}$  represent respectively the mean density

and the mean horizontal velocity at the outlet. The flow rate is then determined by these two quantities.

(ii) Following equation 3.5, the mean horizontal velocity tends asymptotically as  $d$  decreases towards:

$$\xi_v \sqrt{gD} \sqrt{\frac{1}{1 + \gamma_2 D/W}} = \xi_v \sqrt{gD} F(D/W)$$

where  $F(D/W) = \sqrt{1/[1 + \gamma_2 D/W]}$  that corresponds to the value for infinitely small particles.

(iii) The granular media tends to dilate at the outlet to maintain the flow. However for a large number of beads in the aperture, we suppose that it tends asymptotically toward a fraction of the bulk density,  $\xi_\phi \phi_b$ , where  $\xi_\phi$  is a constant.

(iv) We suppose that both the mean density and the mean velocity depend on the number of beads in the aperture through a geometrical function. To take into account the two dimensions of the aperture, we suppose that the flow rate depends on two geometrical functions based on the number of beads in the aperture length  $D/d$  and in the aperture width  $W/d$ . We suppose that this geometrical function can be fitted by an exponential saturation:

$$Q = C'_l \rho \phi_b G_D \left( \frac{D}{d} \right) G_W \left( \frac{W}{d} \right) F \left( \frac{D}{W} \right) W D \sqrt{gD}, \quad (4.2)$$

with  $G_D(D/d) = \left[ 1 - \alpha_D e^{-\beta_D \frac{D}{d}} \right]$  and  $G_W(W/d) = \left[ 1 - \alpha_W e^{-\beta_W \frac{W}{d}} \right]$ .

To test these hypothesis, we have isolated each geometrical function by plotting the dimensionless flow rate  $Q/(\rho \phi_b W D F(\frac{D}{W}) \sqrt{gD})$  as a function of the number of beads in the typical length  $\ell/d$  for the two regimes (i)  $\ell = D$  and (ii)  $\ell = W$ . In figures 14 (a) and (c) all the data for the rectangular silo are plotted and no clear tendency can be observed. However, when considering each regime separately, as done in figures 14 (b) and (d), *i.e.* by selecting the experiments corresponding to the first regime  $\ell = D$  (respectively to the second regime  $\ell = W$ ) taking  $D < 1.8W$  (respectively  $D > 2.2W$ ) and considering a large number of beads in the second direction  $W > 10d$  (respectively  $D > 20d$ ) the remaining data superimpose and can be well adjusted by an exponential saturation with the fitting parameters  $\alpha_D = 1$ ,  $\beta_D = 0.1$ ,  $\alpha_W = 0.46$  and  $\beta_W = 0.1$  (see the black lines in the figures). These parameters are in the same order of magnitude than that of the literature for both geometrical functions. It is interesting to note that the same  $\beta$  is recover in the two directions. The same procedure has been followed for the cylindrical silo. Again we find that both geometrical function can be well adjusted by an exponential saturation with the fitting parameter  $\alpha_D = 0.45$ ,  $\beta_D = 0.07$ ,  $\alpha_W = 0.59$  and  $\beta_W = 0.07$ , in agreement with the literature.

Finally figures 15 show the normalised flow rate using the geometrical functions,  $Q/\left[\rho \phi_b G_D(D/d) G_W(W/d) \sqrt{gW^5}\right]$  as a function of the aperture aspect ratio  $D/W$  for the whole range of particle diameters for (a) the rectangular silos and (b) the cylindrical silos. In this representation the data collapses and can be well adjusted by the same asymptotical laws in two regimes as in figure 5 and 12. It seems that the geometrical functions built on the two dimensions of the aperture depict correctly the dependance of the flow rate with the particle diameter. To test further away some of the expressed assumptions, we performed a 2D discrete simulation of the discharge flow of a silo from a lateral orifice that allows to study the effective velocity and volume fraction profiles.

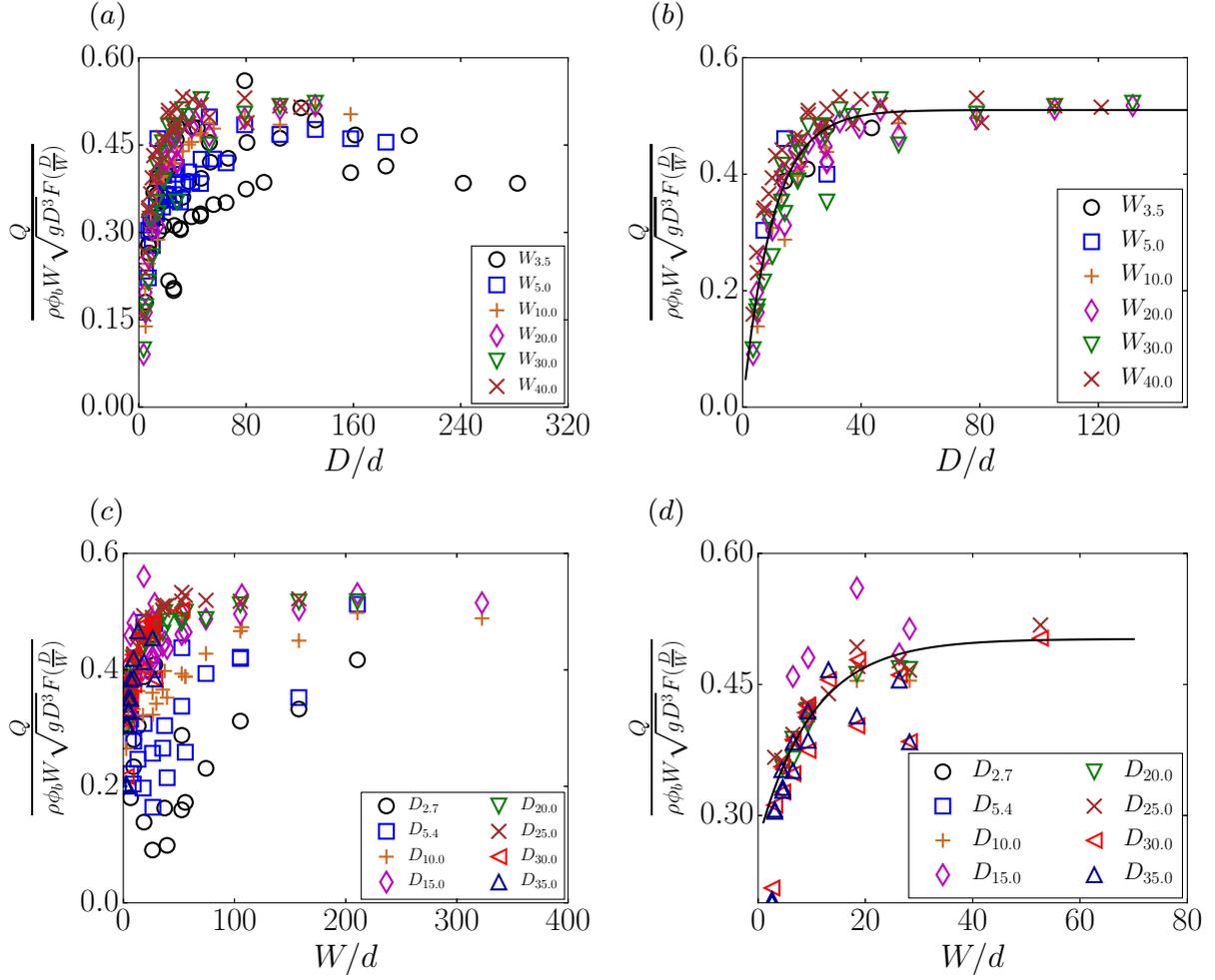


Figure 14: Rectangular silo: dimensionless flow rate  $Q/(\rho\phi_b W D F(\frac{D}{W}) \sqrt{gD})$  versus (a,b)  $D/d$  and (c,d)  $W/d$ . Selected experimental runs : (a,c) all the runs, (b)  $D < 1.8W$  and  $W > 10d$ , (d)  $D > 2.2W$  and  $D > 20d$ . The full lines represents respectively the geometrical functions  $G_D(D/d) = [1 - \alpha_D e^{-\beta_D \frac{D}{d}}]$  and  $G_W(W/d) = [1 - \alpha_W e^{-\beta_W \frac{W}{d}}]$  with  $\alpha_D = 1$ ,  $\beta_D = 0.1$ ,  $\alpha_W = 0.46$  and  $\beta_W = 0.1$ .

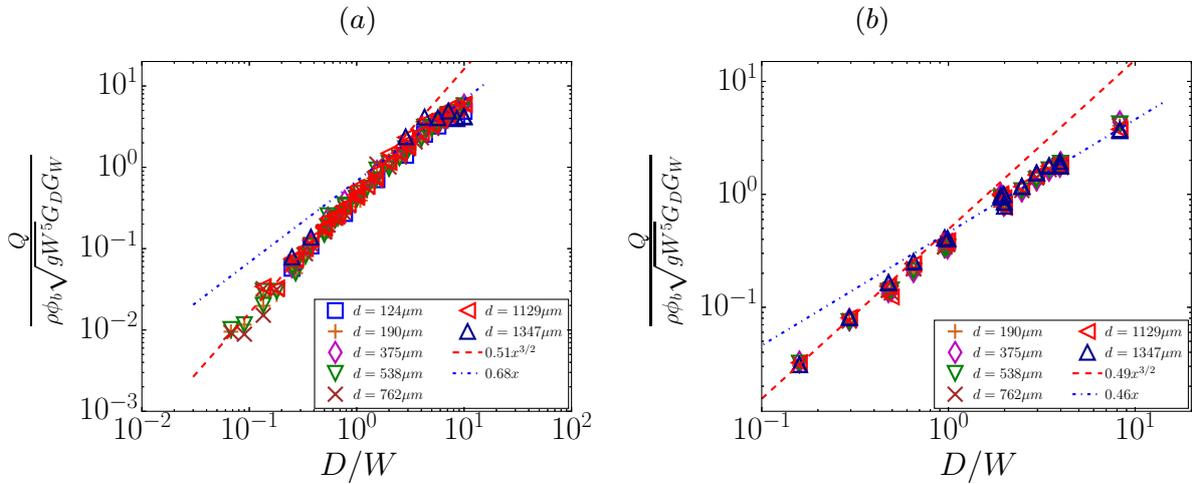


Figure 15: The mass flow rate  $Q$  normalized by  $\rho\phi_b \sqrt{gW^5} G_D(D/d) G_W(W/d)$  as a function of  $D/W$  for different particles diameter  $d$  for (a) the rectangular silos and (b) the cylindrical silo.

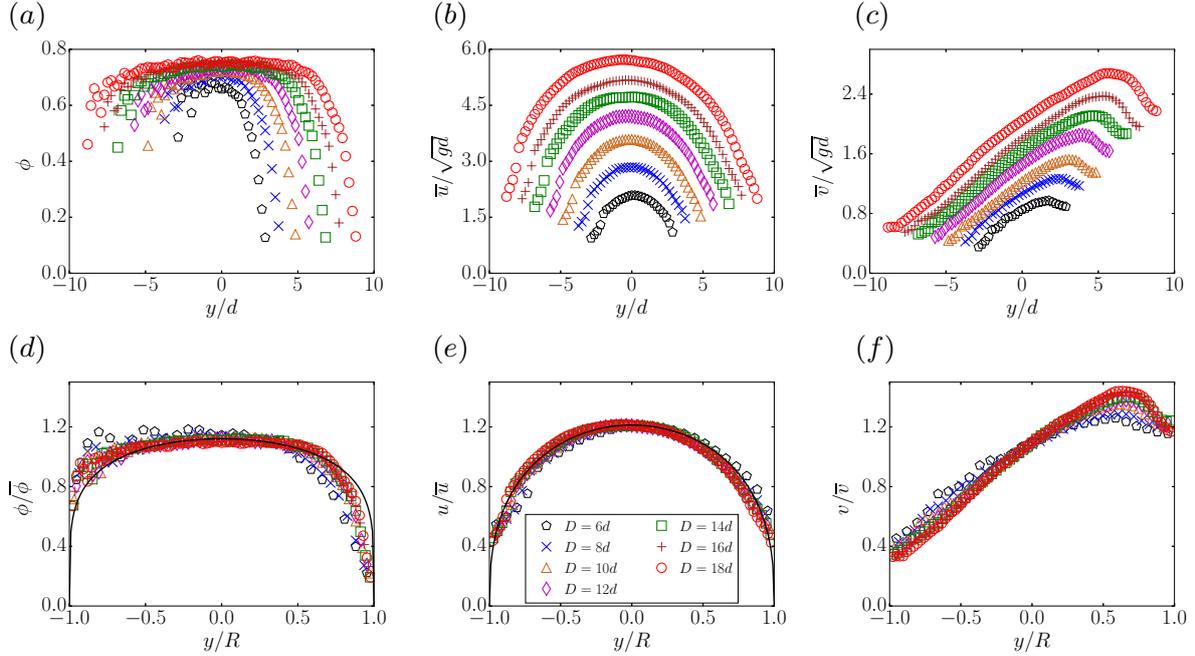


Figure 16: (Color online)(a-f) Flow of particles of diameter of  $d = 2$  mm for different outlet diameters. Vertical profiles of (a) the volume fraction,  $\phi$ , (b) the horizontal velocity,  $u$ , and (c) the vertical velocity,  $v$ , versus the vertical position,  $y$ . Vertical profiles of (d) the volume fraction normalised by the mean volume fraction,  $\bar{\phi}$ , (e) the horizontal velocity made dimensionless by the mean horizontal velocity,  $\bar{u}$ , and (f) the vertical velocity made dimensionless by the mean vertical velocity,  $\bar{v}$ , versus the position normalised by the outlet radius ( $R = D/2$ ). The full lines represent respectively in (d) Eq. 4.3 with  $\nu_\phi = 0.21$  and in (e) Eq. 4.4 with  $\nu_v = 0.38$ .

#### 4.1.1. Discrete simulation in 2D case

The description of the discrete particle simulations is done in section 2.2. In this two dimensional configuration, following exactly what was done for a bottom orifice, experimentally by Janda *et al.* (2012) and with a 2D discrete simulation by Zhou *et al.* (2015), we are able to test most of the hypotheses (i) to (iv) made in the previous section, for the Hagen-Beverloo regime.

(i) We have first assumed that at the lateral outlet, the horizontal velocity profile together with the density profile are self-similar when varying the length of the hole  $R = D/2$ . Figure 17(a-c) show the vertical profile of the volume fraction,  $\phi$ , of the horizontal velocity,  $u$ , and of the vertical velocity,  $v$ , for various aperture length,  $D$ , for a given particle diameter  $d = 2$ mm. The vertical axis,  $y$ , is oriented upward and its origine is located in the middle of the outlet. Similarly to the case of an aperture placed at the bottom of the silo, the volume fraction profile is found to be self-similar when normalised by the mean volume fraction,  $\bar{\phi}$  as shown in figure 17(d). The self-similar profile is slightly dissymmetric, the top of the profile exhibiting a slightly higher dilatancy at the edge than at the bottom. Nevertheless it can be reasonably well adjusted by

$$\phi(y) = \bar{\phi} \gamma(\nu_\phi) \left[ 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right]^{\nu_\phi}, \quad (4.3)$$

where  $\gamma(\nu) = (2/\sqrt{\pi})\Gamma(\nu + 3/2)/\Gamma(\nu + 1)$ . The fitting parameter  $\nu_\phi = 0.21 \pm 0.01$ , obtained using the least squares methods, is similar to that obtained for a bottom

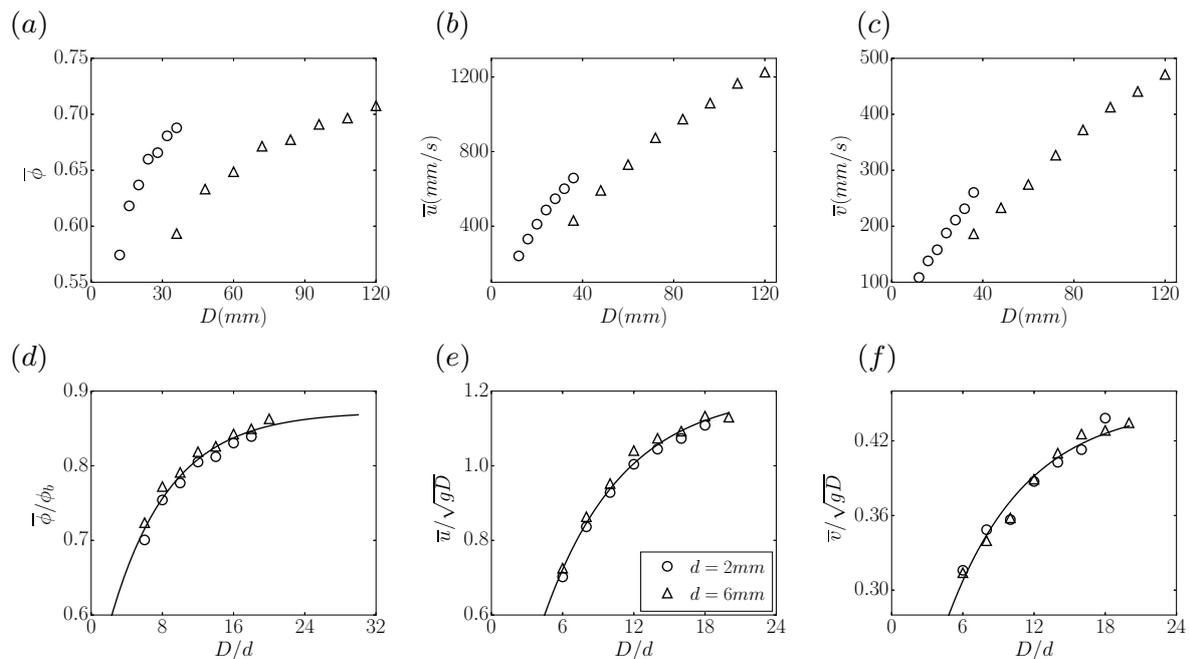


Figure 17: (a) Mean volume fraction at the outlet,  $\bar{\phi}$ , (b) mean horizontal velocity,  $\bar{u}$ , and (c) mean vertical velocity,  $\bar{v}$ , versus the diameter apertures  $D$ , for two particle diameters. (d) Mean volume fraction at the outlet,  $\bar{\phi}$ , normalised by the bulk volume fraction,  $\phi_b$ , (e) mean horizontal velocity,  $\bar{u}$ , made dimensionless by  $\sqrt{gd}$  and (f) mean vertical velocity,  $\bar{v}$ , made dimensionless by  $\sqrt{gd}$ , versus the number of beads in the apertures  $D/d$ , for two particle diameters. The full line represent respectively in (d) Eq. 4.5 with  $\xi_\phi = 0.87$ ,  $\alpha_\phi = 0.44$ , and  $\beta = 0.15$ , in (e) Eq. 4.6 with  $\xi_u = 1.2$ ,  $\alpha_u = 0.98$  and  $\beta = 0.15$  and in (f) Eq. 4.7 with  $\xi_v = 0.45$ ,  $\alpha_v = 0.78$  and  $\beta = 0.15$ .

aperture  $\nu_\phi = 0.19 \pm 0.01$  by Zhou et al. (2015). On the same way, once normalised by the mean horizontal velocity,  $\bar{u}$ , the horizontal velocity profile is found to be self-similar and well adjusted by

$$u(y) = \bar{u} \gamma(\nu_v) \left[ 1 - \left( \frac{y}{R} \right)^2 \right]^{\nu_v}, \quad (4.4)$$

with the fitting parameter  $\nu_v = 0.38 \pm 0.01$  obtained using the least squares method. This parameter is identical than that obtained for the vertical velocity by Zhou et al. (2015) in the silo with a bottom aperture. Finally, the horizontal velocity profile is also found to be self-similar. The self-similar profile is clearly non symmetrical, exhibiting mainly a linear profile on the main part of outlet with a maximum close to the top where the velocity decreases toward the edge. The first hypothesis is then fulfilled and the flow rate is given by  $Q = c\rho D\bar{\phi}\bar{u}$ , where  $c$  is a constant.

To test the following hypotheses (ii) - (iv) we have plotted in figure 17 (a-c) the mean volume fraction,  $\bar{\phi}$  and the mean horizontal and vertical velocities,  $\bar{u}$  and  $\bar{v}$ , as a function of the aperture length,  $D$ , for two particles diameters,  $d = 2\text{mm}$  ( $\circ$ ) and  $d = 6\text{mm}$  ( $\triangle$ ). Clearly all these variables depend on the particle diameters. In figure 17 (d-f), the same variables are plotted, normalised by the assumed asymptotic behaviour, as a function of the number of beads in the aperture. The data collapse on single curves, as observed for the silo with a bottom aperture, which are well adjusted by an exponential saturation as

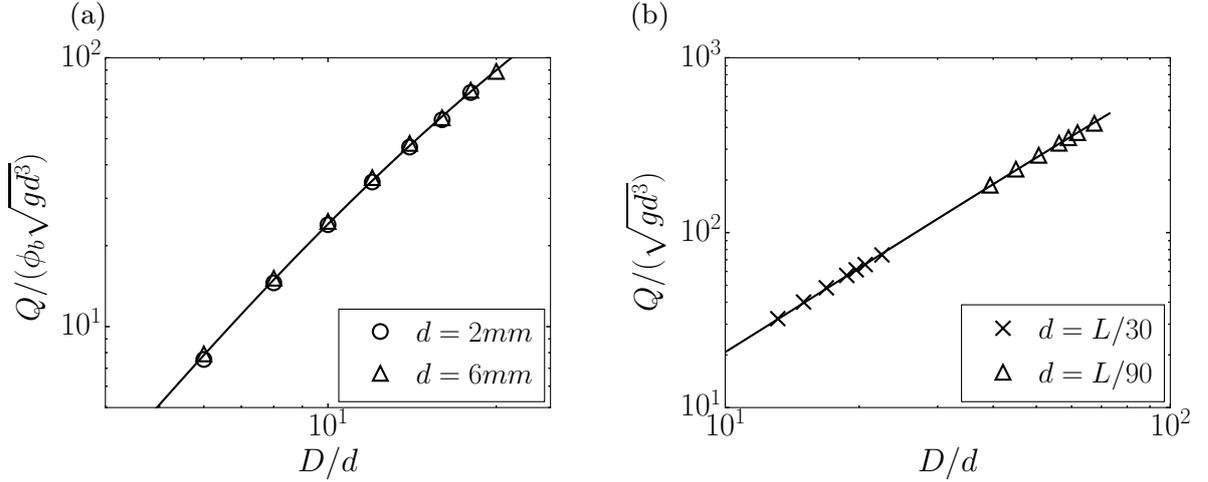


Figure 18: Flow rate made dimensionless by  $\sqrt{gd^3}$  versus the number of beads in the aperture  $D/d$  for the 2D case, (a) discrete simulation, (b) continuous simulation. The full lines represent Eq. 4.8 with (a)  $C'_l = 1.08$  and (b)  $C'_l = 0.78$ .

expected:

$$\bar{\phi} = \xi_\phi \phi_b \left[ 1 - \alpha_\phi e^{-\beta \frac{D}{d}} \right] = \xi_\phi \phi_b G_\phi \left( \frac{D}{d} \right), \quad (4.5)$$

$$\bar{u} = \xi_u \sqrt{gD} \left[ 1 - \alpha_u e^{-\beta \frac{D}{d}} \right] = \xi_u \sqrt{gD} G_u \left( \frac{D}{d} \right), \quad (4.6)$$

$$\bar{v} = \xi_v \sqrt{gD} \left[ 1 - \alpha_v e^{-\beta \frac{D}{d}} \right] = \xi_v \sqrt{gD} G_v \left( \frac{D}{d} \right), \quad (4.7)$$

with the fitting parameters  $\beta = 0.15$ ,  $\xi_\phi = 0.87$ ,  $\alpha_\phi = 0.44$ ,  $\xi_u = 1.2$ ,  $\alpha_u = 0.98$ ,  $\xi_v = 0.45$ ,  $\alpha_v = 0.78$ , obtained using the least squares method. Once again, these parameters closely match those obtained by Zhou *et al.* (2015) in the bottom configuration. The same  $\beta$ , fitted on the volume fraction, is found to adjust correctly the mean velocities variations. This suggests that the same phenomenon is implied in the variation at the outlet of the volume fraction and of the velocities with respect to the particle size. These equations also suggest that in the Hagen-Beverloo regime, the angle of inclination of the streamline at the outlet, define as  $\tan(\theta) = \bar{u}/\bar{v}$  depends only very slightly on the outlet size  $D$  through a geometrical function  $G_u/G_v$ . Finally the flow rate is given by

$$Q = C'_l \rho \phi_b \sqrt{gD} G_\phi \left( \frac{D}{d} \right) G_u \left( \frac{D}{d} \right) \approx C'_l \rho \phi_b \sqrt{gD} G \left( \frac{D}{d} \right), \quad (4.8)$$

where  $C'_l = \xi_\phi \xi_v \gamma(\nu_v) \gamma(\nu_\phi) \int_0^1 (1-t^2) dt = 1.08$  and  $G = \left[ 1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}} \right]$  with  $\alpha = \alpha_\phi + \alpha_u$ . In the range of number of beads in the aperture considered ( $D/d > 6$ ), the approximation of  $G \approx G_u G_\phi$  leads to less than 5% of error. This equation adjusts well the data with the fitting parameter  $C'_l = 1.08$  as seen in figure 18, and is similar to equation 4.2 considering  $W = \infty$ .

Using a 2D discrete simulation we have shown that the dependance of the flow rate with the particle size can be modelled using a geometrical function which depends only on the number of bead in the aperture. This geometrical function is seen to influence both the volume fraction at the outlet, bigger particles leading to a dilation, and the velocity, bigger particles leading to slower flow. It would be interesting in future work to conduct 3D discrete simulation to see if we recover the same geometrical function for

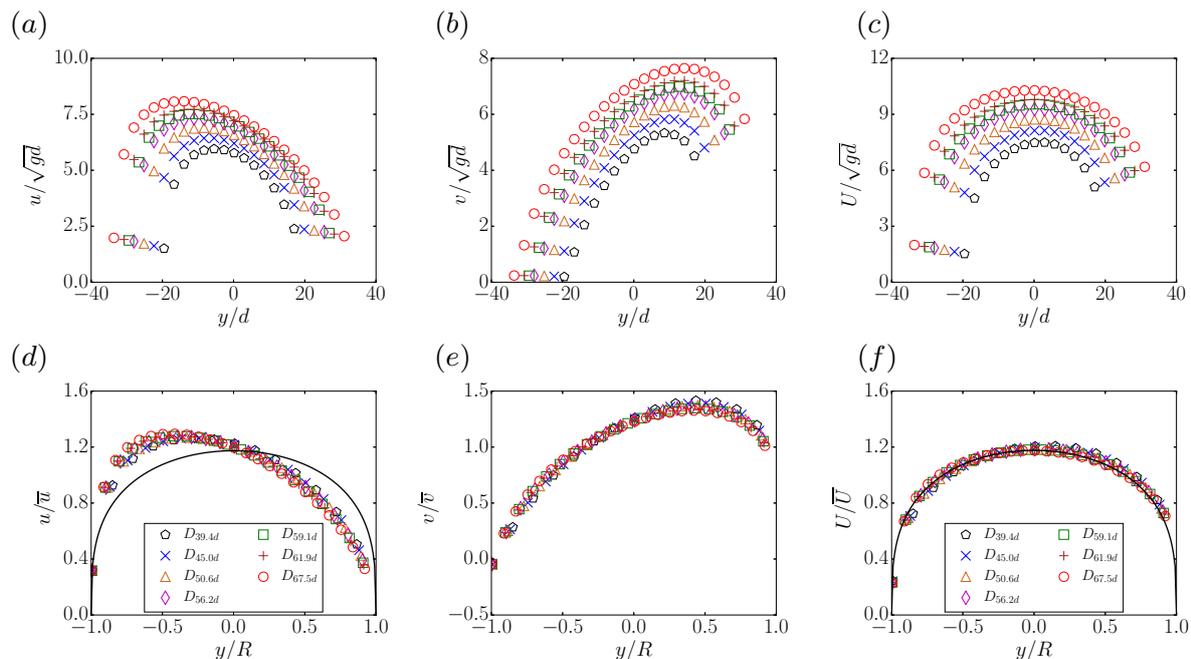


Figure 19: 2D continuous simulation (a,d) horizontal velocity (b,e) vertical velocity and (c,f) norm of the velocity, (a,b,c) normalised by  $\sqrt{gd}$  versus  $y/d$  and (d,e,f) normalised by the mean value versus  $y/R$ , the full lines in (d,f) represent Eq. 4.4 with  $\nu_v = 0.31$ .

the number of beads in the silo width, in the regime dominated by the lateral friction, as suggested by the experimental results.

#### 4.2. Continuous simulation

We have seen in section 3 that the continuous simulation described correctly most of the observation on the discharge of a silo with a lateral aperture, for various  $D$  and various  $W$  but for a given particle diameter. However the  $\mu(I)$  rheology contains the information on the particle diameter in the definition of the inertial number  $I = d\sqrt{2D_2}/(\sqrt{p/\rho})$ . In this section we wonder if the continuous simulation is able to recover partially the dependance on the particle size of the flow rate. Indeed, even if this simulation considers a constant volume fraction, the 2D discrete simulation have shown that the velocity at the outlet may follow the same geometrical law than the volume fraction.

Figure 19 presents the vertical profile at the outlet of the horizontal velocity, the vertical velocity and the norm of the velocity, for a given particle diameter in the 2D case. Interestingly, when normalised by the mean value, these profiles are again found to be self-similar. However, contrarily to the discrete simulation, the horizontal velocity profile exhibits a strong asymmetry between the top and the bottom of the outlet. As a consequence, the ajustement by the equation 4.4 with the fitting parameter  $\nu_u = 0.31 \pm 0.01$  obtained using least squares method is not satisfactory. However the vertical velocity profile resembles the discrete simulation result. Interestingly, the profile of the norm of the velocity is find to remain symmetrical and is well adjusted by equation Eq. 4.4 with  $\nu_v = 0.31$ .

Figures 20(a,b,c) show the mean value of the horizontal and vertical velocities and of the norm of the velocity, normalised by  $\sqrt{gL}$  versus the dimensionless outlet diameter  $D/d$  for two particles diameters  $d = L/30$  and  $d = L/90$ . Clearly these mean velocities depend on the outlet size,  $D$ , but also on the particle diameter,  $d$ . Following the discrete simulation study we have plotted in figure 20(d,e,f) these velocities made dimensionless with  $\sqrt{gD}$  versus  $D/d$ . The data corresponding to the mean horizontal

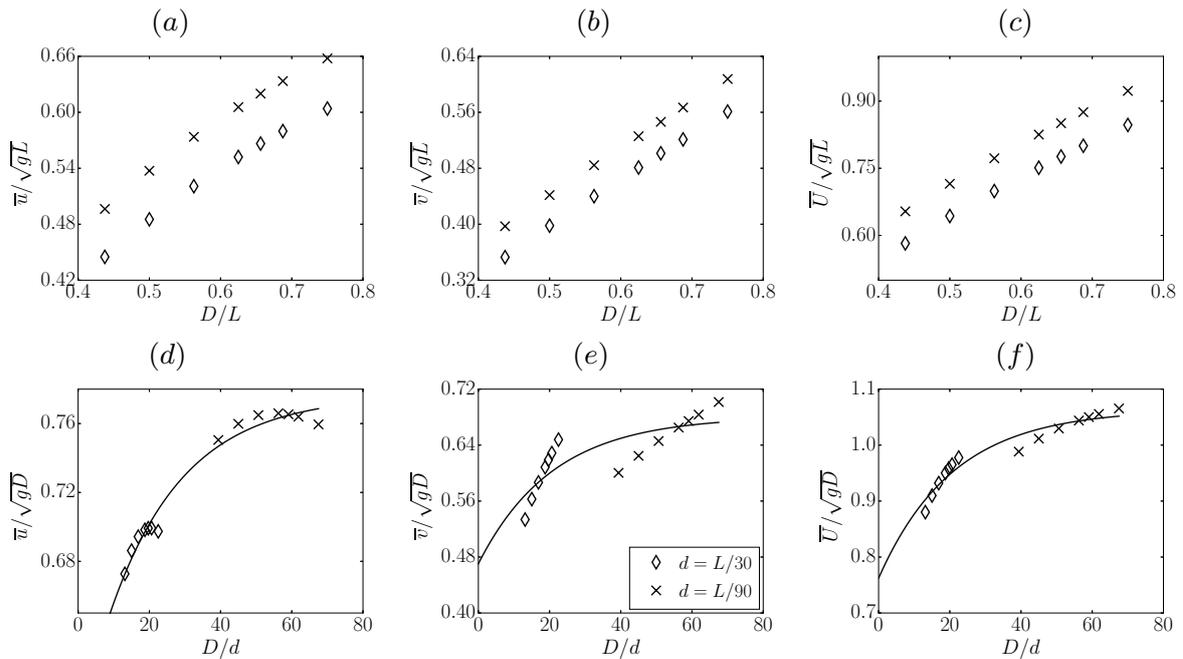


Figure 20: 2D continuous simulation (a,d) horizontal velocity, (b,e) vertical velocity, and (c,f) norm of the velocity normalised in (a,b,c) by  $\sqrt{gL}$  versus  $D/L$  and normalised in (d,e,f) by  $\sqrt{gD}$  versus  $D/d$  for two particles diameters. The full lines in (d,e,f) represents equation 4.6 with the fitting parameters  $\beta = 0.05$ ,  $\xi_u = 0.78$ ,  $\alpha_u = 0.25$ ,  $\xi_v = 0.68$ ,  $\alpha_v = 0.31$ ,  $\xi_U = 1.06$  and  $\alpha_U = 0.28$  obtained using the least squares method.

velocity (respectively to the mean norm) are reasonably well adjusted by equation 4.6 with the fitting parameters  $\beta = 0.05$ ,  $\xi_u = 0.78$  and  $\alpha_u = 0.25$  (respectively  $\xi_U = 1.06$  and  $\alpha_U = 0.28$ ). The value of  $\beta$  is sensibly lower than the value obtained experimentally or in the discrete simulation. However the same tendency than observed in the discrete simulation is recovered. This is not the case for the mean vertical velocity for which the data do not follow the asymptotic behaviour in  $\sqrt{gD}$ . However this velocity is not involved in the flow-rate and the equation 4.8 using the fitting parameters predicts well the flow rate, see the full line in figure 18b.

Finally we have done the same analysis in the pseudo 3D continuous simulation, in the regime controlled by the sidewall friction. Figure 21a presents the profile of the horizontal velocity at the outlet for various  $D$ . In this regime, the profiles present the same asymmetric shape than in the Hagen-Beverloo profile, nevertheless the velocity does not seem to depend on  $D$  anymore. Figure 21b shows the mean horizontal velocity, normalised by  $\sqrt{gW}$  versus  $W/d$  for data corresponding to the second regime,  $D/W > 3$ . Clearly we don't observe the geometrical function as suggested by the experimental results. This is not surprising as the flow is not solve throughout the silo width, then the  $I$  number is not expected to play any role in this direction.

To conclude this section, we found that a dependance on the particle diameter is observed in the 2D continuous simulation, that the velocity profiles are self-similar when varying the outlet length, and that the mean horizontal velocity tends asymptotically towards  $\sqrt{gD}$ , contrarily to the mean vertical velocity. This behaviour is well described by a geometrical function given by equation 4.6. However the profiles present much asymmetry than the one predicted by the 2D discrete simulation. This can be due to the fact that the volume fraction has been assumed to be uniform, whereas the complete  $\mu(I)$ -rheology, that includes a  $\phi(I)$  law, would predict a dilation of a granula media when it is sheared. The dependance on the particle diameter for the regime controlled by the

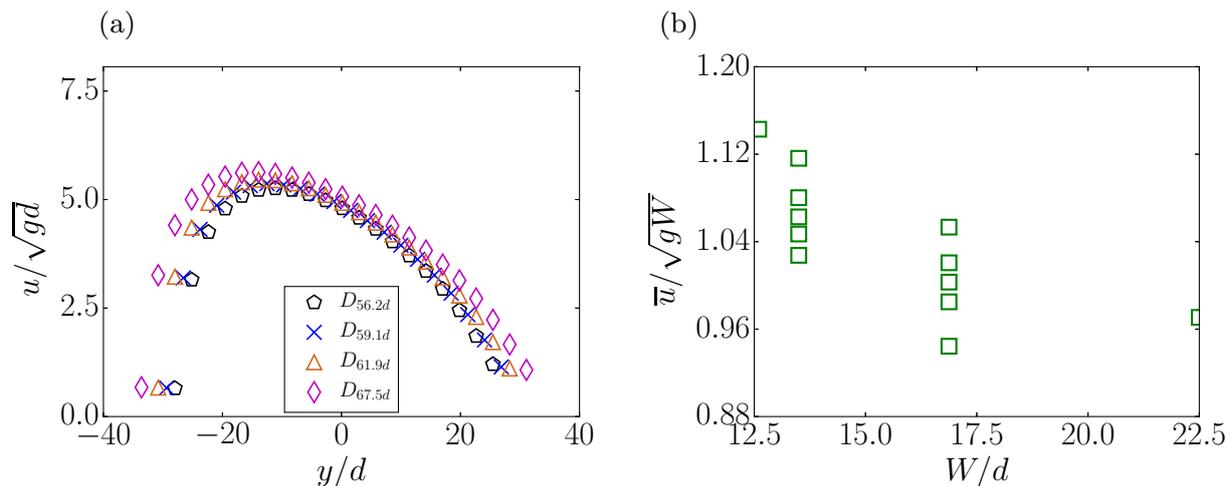


Figure 21: Pseudo 3D continuous simulation. (a) Horizontal velocity normalized by  $\sqrt{gd}$  versus  $y/d$  at the outlet for different  $D$  and  $W = 13.5d$  (b) mean horizontal velocity normalised by  $\sqrt{gW}$  for  $D/W > 3$ .

sidewalls is not correctly described by the pseudo 3D continuous simulation which does not solve the flow in the silo width direction.

## 5. Conclusion and perspectives

Using experiments, 2D discrete simulations and continuous simulations we have studied the discharge of a silo with a lateral orifice. Experimentally we have observed two regimes of flow, either in a rectangular silo with an orifice spanning the thickness  $W$  of the silo, or in a cylindrical silo. The first regime, observed for small aperture aspect ratio  $\mathcal{A} = D/W$ , corresponds to the well known Hagen-Beverloo regime with a flow rate  $Q \propto WD^{3/2}$ . The second regime, observed for large aperture aspect ratio  $\mathcal{A} > \mathcal{A}_c$ , follows  $Q \propto W^{3/2}D$ . We have proposed an empirical law which predicts the flow rate depending on the aperture dimensions and which recovers both regime. The continuous simulation, using the frictional  $\mu(I)$  rheology and solved in 2D with an additional force to take into account the wall friction, is found to describe correctly these two regimes and most of the internal details of the flow field observed experimentally in the rectangular silo. The dependance on the silo width suggests that the small  $\mathcal{A}$  regime is dominated by the lateral friction, and it seems reasonable to think that the large  $\mathcal{A}$  regime is controlled by the internal friction on the vertical plane. The ability of the velocity field to align with gravity in the presence of lateral wall friction seems to be able to explain most of the internal details of the flow.

To take into account the dependance of the flow rate with the particle diameter, we have performed experiments varying this parameter. We have found that following Janda *et al.* (2012); Zhou *et al.* (2015) this dependency can be correctly described using two geometrical functions  $G_\ell(\ell/d) = 1 - \alpha e^{-\beta\ell/D}$  based respectively on  $W$  and on  $D$ ,  $Q \propto [\rho\phi_b G_D(D/d)G_W(W/d)F(D/W)DW\sqrt{gD}]$  with  $F(D/W) = \sqrt{1/[1 + \gamma_2 D/W]}$ . A main part of this behaviour is well reproduced using a 2D discrete simulation where we have shown that the dependance of the flow rate with the particle size can be modelled using a geometrical function which depends only on the number of beads in the aperture. This geometrical function is seen to influence both the volume fraction at the outlet, bigger particles leading to a dilation, and the mean velocities, bigger particles leading to slower flow. Interestingly a dependance on the particle diameter is also observed in

the 2D continuous simulation, where the mean horizontal velocity is found to be well described using a geometrical function. However the profile presents much asymmetry than the one predicted by the 2D discrete simulation. This can be due to the fact that in the continuous simulation the volume fraction does not vary, whereas a more complete  $\mu(I)$ -rheology, including a  $\phi(I)$  law, would predict a dilatation of the granula media when it is sheared. The dependance on the particle diameter for the regime controlled by the sidewalls is not correctly described by the pseudo 3D continuous simulation which does not solve the flow in the silo width direction.

In future work it would be interesting to conduct 3D discrete simulation to see if we recover the same geometrical function for the number of beads in the silo width, in the regime dominated by the lateral friction, as suggested by the experimental results. Moreover the continuous simulation solved in 2D with the  $\mu(I)$  visco-plastic rheology and with an additional force to take into account the lateral friction seems to reproduce most of the behaviour of the discharge flow of a silo with a lateral orifice. These promising observations need to be confirmed conducting systematic 3D simulations, including realistic boundary conditions to represent particles-wall friction as well as the volume fraction variation  $\phi(I)$ .

## REFERENCES

- AGUIRRE, M. A., GRANDE, J. G., CALVO, A., PUGNALONI, L. A. & GÉMINARD, J.-C. 2010 Pressure independence of granular flow through an aperture. *Phys. Rev. Lett.* **104**, 238002.
- BENYAMINE, M., DJERMANE, M., DALLOZ-DUBRUJEAUD, B. & AUSSILLOUS, P. 2014 Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo. *Phys. Rev. E* **90**, 032201.
- BERTHO, Y., GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, F. & HULIN, J.-P. 2003 Dynamical Janssen effect on granular packing with moving walls. *Phys. Rev. Lett.* **90** (14), 144301.
- BEVERLOO, W. A., LENIGER, H. A. & DE VELDE, J. VAN 1961 The flow of granular solids through orifices. *Chem. Eng. Sci.* **15**, 260–269.
- CHOI, J., KUDROLLI, A. & BAZANT, M. Z. 2005 Velocity profile of granular flows inside silos and hoppers. *J. Phys.: Condens. Matter* **17**, S2533–S2548.
- DAVIER, G. & BERTAILS-DESCOUBES, F. 2016 Nonsmooth simulation of dense granular flows with pressure-dependent yield stress. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics* **234**, 15–35.
- DUNATUNGA, S. & KAMRIN, K. 2015 Continuum modelling and simulation of granular flows through their many phases. *Journal of Fluid Mechanics* **779**, 483– 513.
- JANDA, A., ZURIGUEL, I. & MAZA, D. 2012 Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 248001.
- JOP, P., FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2005 Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology. *Journal of Fluid Mechanics* **541**, 167–192.
- JOP, P., FORTERRE, Y. & POULIQUEN, O. 2006 A constitutive law for dense granular flows. *Nature* **441**, 727–730.
- LAGRÉE, P.-Y., STARON, L. & POPINET, S. 2011 The granular column collapse as a continuum: validity of a Navier-Stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology. *Journal of Fluid Mechanics* **686**, 378–408.
- MEDINA, A., CABRERA, D., LÓPEZ-VILLA, A. & PLIEGO, M. 2014 Discharge rates of dry granular material from bins with lateral exit holes. *Powder Technology* **253**, 270–275.
- MEUNIER, PATRICE & LEWEKE, THOMAS 2003 Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Experiments in fluids* **35** (5), 408–421.
- MIDI, G. D. R. 2004 On dense granular flows. *The European Physical Journal E* **14** (4), 341–365.
- PERGE, C., AGUIRRE, M.A., GAGO, P.A., PUGNALONI, L.A., TOURNEAU, D. LE & GÉMINARD, J.C. 2012 Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys* **85**.
- RADJAI, F. & DUBOIS, F. 2011 *Discrete-element modeling of granular materials*. Wiley-Iste.

- RUBIO-LARGO, S.M., JANDA, A., MAZA, D., ZURIGUEL, I. & HIDALGO, R.C. 2015 Disentangling the free-fall arch paradox in silo discharge. *Phys. Rev. Lett.* **114**, 238002.
- SERRANO, D.A., MEDINA, A., CHAVARRIA, G. RUIZ, PLIEGO, M. & KLAPP, J. 2015 Mass flow rate of granular material flowing from tilted bins. *Powder Technology* **286**, 438–443.
- SHELDON, H. G. & DURIAN, D. J. 2010 Granular discharge and clogging for tilted hoppers. *Granul. Matter* **12**, 579–585.
- STARON, L., LAGRÉE, P.-Y. & POPINET, S. 2012 The granular silo as a continuum plastic flow: The hour-glass vs the clepsydra. *Phys. Fluids* **24**, 103301.
- STARON, L., LAGRÉE, P.-Y. & POPINET, S. 2014 Continuum simulation of the discharge of the granular silo, a validation test for the  $\mu(I)$  visco-plastic flow law. *Eur. Phys. J. E* **37** (5).
- TIGHE, B.P & SPERL, M. 2007 Pressure and motion of dry sand: translation of Hagen’s paper from 1852. *Granul. Matter* **9**, 141 – 144.
- ZHOU, Y., RUYER, P. & AUSSILLOUS, P. 2015 Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo: discrete particle simulations. *Phys. Rev. E* **92**, 062204.

## 5.2.1 Compléments à l'article

Dans cette étude, réalisée avec le kit décrit au chapitre 3, nous avons proposé la loi suivante pour prédire le débit de vidange d'un silo avec un orifice latéral de largeur  $W$  et de hauteur  $D$  :

$$Q = C'_i \rho \phi_b G_D \left( \frac{D}{d} \right) G_W \left( \frac{W}{d} \right) F \left( \frac{D}{W} \right) W \sqrt{gD^3}, \quad (5.1)$$

avec les fonction géométriques  $G_D(D/d) = \left[ 1 - \alpha_D e^{-\beta \frac{D}{d}} \right]$ ,  $G_W(W/d) = \left[ 1 - \alpha_W e^{-\beta \frac{W}{d}} \right]$  et  $F(D/W) = \sqrt{1/[1 + \gamma_2 D/W]}$  dont les paramètres sont récapitulés dans le tableau 5.1. La géométrie des silos étanches utilisés par la suite s'écarte de celle du kit (voir chapitre 3). Nous présentons ici la calibration de l'équation 5.1 pour ces silos étanches.

Les orifices étudiés dans ces silos étanches correspondent à des rapports d'aspect  $\mathcal{A} = D/W$  élevés, c'est à dire  $\mathcal{A} > \mathcal{A}_c$ . On se trouve ainsi dans le régime contrôlé par la friction latérale. Par souci de simplicité, nous allons supposer que dans ce régime  $G_D(D/d) \approx 1$ . Sur la figure 5.1 nous avons représenté le débit normalisé  $Q/[\rho \phi_b F \left( \frac{D}{W} \right) W \sqrt{gD^3}] \approx C'_i G_W(W/d)$  en fonction de  $W/d$  pour les silos cylindriques et rectangulaires. Dans les deux cas, les données se superposent relativement bien et sont bien ajustées par l'équation 5.1. Les silos cylindriques utilisées pour l'expérience en kit ou l'expérience étanche sont pratiquement identiques et nous avons ajusté l'équation 5.1 en reprenant les paramètres obtenus pour le kit. L'accord est relativement bon, sauf pour les faibles  $W/d$  où l'hypothèse  $G_D(D/d) \approx 1$  est probablement mise en défaut. Dans le cas du silo rectangulaire, celui que nous avons conçu est sensiblement différent du kit, surtout du point de vue de la rugosité des interfaces, qui sont plus lisses, et de l'épaisseur, qui est mieux contrôlée. Nous avons par exemple observé que la fraction volumique initiale évaluée dans les deux cas est relativement différente (voir le chapitre 3). Pour ces raisons, nous avons choisi d'évaluer les paramètres de la fonction géométrique  $C'_i G_W(W/d) = C'_i \left[ 1 - \alpha_W e^{-\beta \frac{W}{d}} \right]$  pour ce silo, tout en gardant le résultat de l'expérience en kit pour la fonction  $F(D/W) = \sqrt{1/[1 + \gamma_2 D/W]}$ . Les paramètres obtenus sont résumés sur le tableau 5.1, nous pouvons voir qu'ils sont du même ordre de grandeur dans les diverses configurations.

Par ailleurs, dans le cas des silos cylindriques, nous avons aussi étudié expérimentalement une géométrie circulaire pour l'orifice de taille  $D$ . Pour ces cas, le débit s'écrit

$$Q = C'_i \rho \phi_b G_D \left( \frac{D}{d} \right) \sqrt{gD^5}, \quad (5.2)$$

La figure 5.2 illustre la bonne cohérence des résultats expérimentaux avec notre modèle dans cette géométrie différente. La géométrie est telle qu'on ne peut plus discriminer entre les deux régimes (l'extension verticale de l'orifice étant égale à son extension horizontale). La loi d'échelle est cohérente avec cette particularité géométrique. On retrouve un effet similaire de dilatation de l'écoulement en fonction du nombre de particules dans l'orifice.

TABLE 5.1 – Paramètres de la loi de débit 5.1 pour les silos étudiés.

	$C'_l$	$\beta$	$\alpha_D$	$\alpha_W$	$\gamma_2$
Cylindrique	0.49	0.07	0.45	0.59	1.13
Rectangulaire (kit)	0.51	0.1	1	0.46	0.56
Rectangulaire (étanche)	0.41	0.19	-	0.64	0.56

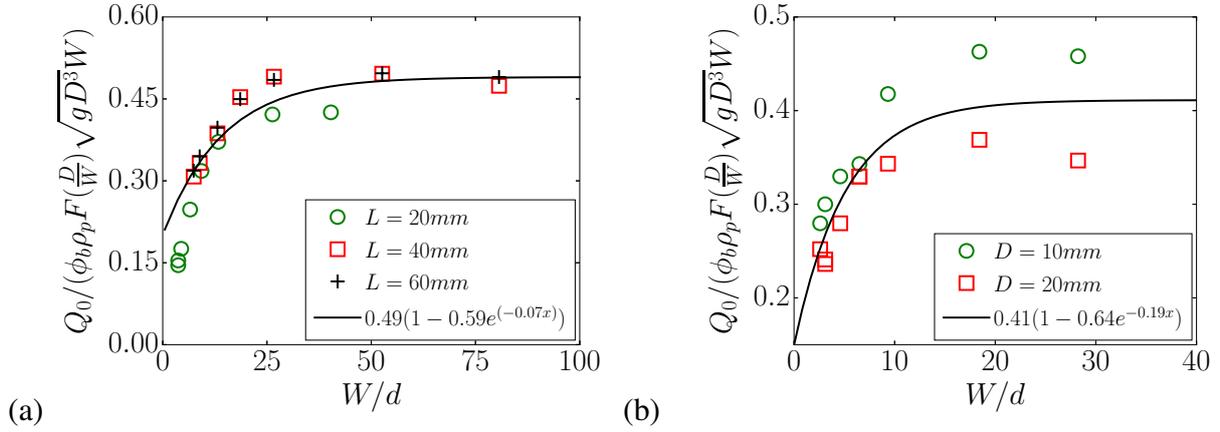


FIGURE 5.1 – Débit massique de particules  $Q / [\phi_b \rho_p F(\frac{D}{W}) W \sqrt{gD^3}]$  en fonction de  $W/d$  pour (a) les silos cylindriques (b) le silo rectangulaire. La ligne solide représente l'équation 5.1.

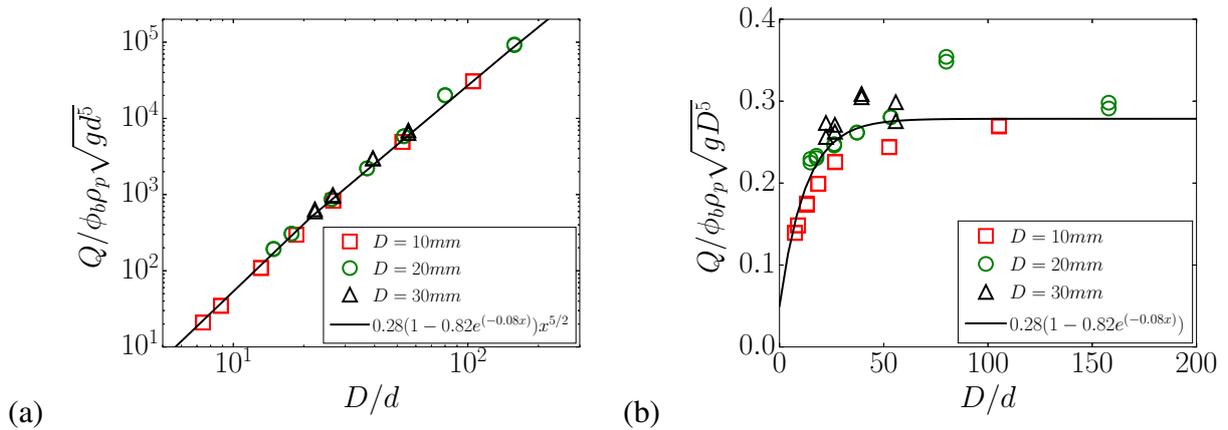


FIGURE 5.2 – Débit massique de particules (a)  $Q / [\phi_b \rho_p \sqrt{gd^5}]$  (b)  $Q / [\phi_b \rho_p \sqrt{gD^5}]$  en fonction de  $D/d$  pour les silos cylindriques de taille  $L = 40mm$  avec des trous ronds de tailles différentes. La ligne solide représente l'équation 5.2 avec  $C'_l = 0.28$ ,  $\alpha = 0.82$  et  $\beta = 0.08$ .

## 5.3 Conclusion et perspective

Dans cette étude, nous avons étudié systématiquement la vidange simple du silo dans les configurations rectangulaire et cylindrique possédant un orifice latéral, en variant trois paramètres : la hauteur de l'orifice  $D$ , l'épaisseur de l'orifice  $W$  et la taille de particules  $d$  et en utilisant des expériences, des simulations discrètes 2D et des simulations continues. Nous avons mis en évidence deux régimes d'écoulements, suivant les valeurs du rapport d'aspect de l'orifice  $D/W$ . Le premier régime, observé pour des faibles rapports d'aspect, correspond au régime Hagen-Beverloo avec un débit  $Q \propto WD^{3/2}$ . Le deuxième régime, observé pour des grands rapports d'aspect,  $D/W > \mathcal{A}_c$ , suit la loi  $Q \propto W^{3/2}D$ . La simulation continue, avec la rhéologie frictionnelle  $\mu(I)$  et résolue en 2D en ajoutant un terme source pour prendre en compte la friction sur les parois, reproduit ces deux régimes et la plupart des détails internes à l'écoulement observé expérimentalement dans le silo rectangulaire. Ce résultat suggère que le deuxième régime est contrôlé par la friction sur les parois latérales. Dans ce régime, le champ de vitesse tend à s'aligner sur la gravité d'autant plus que  $W$  est petit. L'angle d'inclinaison de la vitesse en sortie par rapport à la verticale dépend donc du rapport  $D/W$ , ce qui suffit à expliquer la plupart des observations quant à la mise à l'échelle du débit en fonction de l'orientation de l'orifice. De façon surprenante la norme de la vitesse ne dépend que de la hauteur de l'orifice en étant mise à l'échelle par  $\sqrt{gD}$ . Finalement, en utilisant la simulation discrète, nous avons montré que pour prendre en compte la dépendance du débit avec la taille des particules, il faut considérer la dilatation des particules à l'orifice à travers une fonction géométrique. Pour décrire les résultats expérimentaux, nous avons proposé d'appliquer cette fonction selon les deux dimensions de l'ouverture.

À partir de ces observations, nous avons proposé une loi empirique qui prédit le débit quelles que soient les dimensions de l'ouverture et la taille des billes (équation 5.1). Cependant les phénomènes physiques conduisant à cette loi ne sont pas encore élucidés. Nous tâcherons au chapitre 8 de discuter les données produites par la simulation continue pour progresser dans cette compréhension.

En perspective, il serait intéressant d'effectuer les simulations continues et discrètes en 3D pour confirmer les études réalisées et les hypothèses du modèle empirique. Néanmoins dans le cas de la simulation continue, une étude approfondie des conditions aux limites à imposer sur les parois semble un préalable important à ce travail. Il serait également intéressant d'incorporer la rhéologie  $\phi(I)$  dans la simulation continue. Cette rhéologie sera-t-elle suffisante pour prédire la dilatation à la sortie observée dans la simulation discrète ? Il est possible qu'il faille également utiliser la rhéologie non locale proposée récemment par plusieurs auteurs [Bouزيد et coll. \[2013\]](#), [Kamrin \[2010\]](#), [Pouliquen et Forterre \[2009\]](#) pour reproduire cet effet.

Enfin, lors des expériences avec le silo rectangulaire, nous avons constaté que le profil de l'in-

terface supérieure du granulaire s'incline au début de la vidange dans le cas des petites épaisseurs  $W$  (voir la figure 10 dans l'article). On peut ainsi observer des avalanches sur cette interface qui sont similaires à celles observées dans des expériences de tambour tournant ([Hung et coll. \[2016\]](#)). Cette observation a motivé une collaboration en cours avec Hervé Capart et Chi-Yao Hung, de l'Université Nationale de Taiwan. Nous avons ainsi effectué des expériences dans le régime  $D/W \gg 1$  afin d'étudier spécifiquement l'avalanche à l'interface supérieure du granulaire.



# Chapitre 6

## Effet d'un écoulement de gaz sur la vidange d'un silo avec orifice inférieur

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'effet d'un écoulement de gaz sur la vidange d'un silo dont l'orifice est situé au centre du fond du silo. Dans une première partie nous présenterons les résultats expérimentaux obtenus, puis nous présenterons un modèle analytique basé sur une modélisation continue à deux phases. Enfin nous comparerons nos résultats à ceux d'une simulation numérique continue.

### 6.1 Résultats expérimentaux

Dans cette partie nous présentons les résultats acquis grâce au système expérimental présenté au chapitre 3. Lors de la vidange, nous injectons de l'air à un débit imposé et nous mesurons la pression de l'air à plusieurs positions. Sauf précision, nous présenterons principalement les résultats acquis dans le silo cylindrique de taille  $L = 60\text{mm}$  pour un orifice de  $D = 10\text{mm}$  car il s'agit de la configuration donnant les temps de vidange les plus longs, ainsi que ceux acquis dans le silo rectangulaire ( $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$ ) car nous disposons alors de mesure de pression au centre de l'écoulement.

#### 6.1.1 Débit de vidange des particules

La figure 6.1 montre le débit massique instantané en fonction du temps pour des particules de diamètre  $d = 538\mu\text{m}$  et un silo cylindrique dans trois conditions : le silo bouché avec un couvercle sans injection d'air, le silo raccordé au circuit d'air avec une injection d'air à débit constant  $Q_{air} = 12\text{l/min}$  et le silo ouvert étudié dans le chapitre précédent. Dans les trois cas on retrouve une phase stationnaire. Le débit massique de vidange  $Q$  est mesuré sur cette phase stationnaire. Nous pouvons voir que la valeur de ce débit la plus importante est obtenue dans le cas avec débit d'air imposé et la plus faible dans le cas avec le silo bouché. Dans cette partie, nous

allons montrer l'influence des paramètres que nous avons fait varier sur le débit de vidange : le débit d'air  $Q_{air}$ , le diamètre de l'orifice  $D$ , la taille du silo  $L$  et la taille de particules  $d$ .

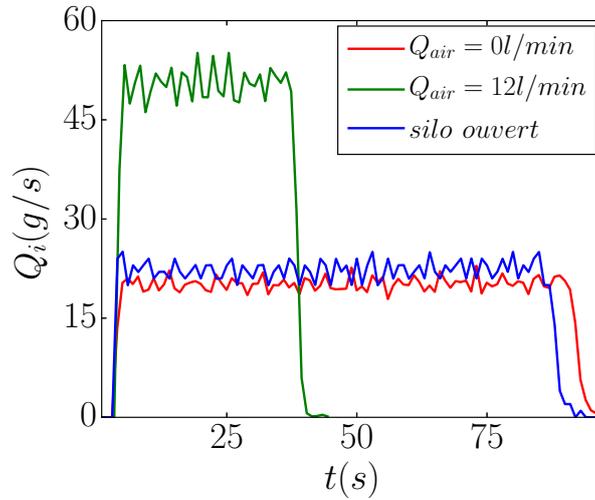


FIGURE 6.1 – Débit massique instantané avec  $Q_{air} = 0\text{l}/\text{min}$  (courbe rouge),  $Q_{air} = 12\text{l}/\text{min}$  (courbe verte), et le silo ouvert (courbe bleue) pour un silo cylindrique avec  $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $d = 538\mu\text{m}$ .

### a. Influence du débit d'air et du diamètre de l'orifice

La figure 6.2a illustre le débit massique de vidange des particules pour le silo cylindrique en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour différentes tailles de particules. Nous pouvons voir que le débit de particules  $Q$  augmente fortement avec le débit d'air  $Q_{air}$ .

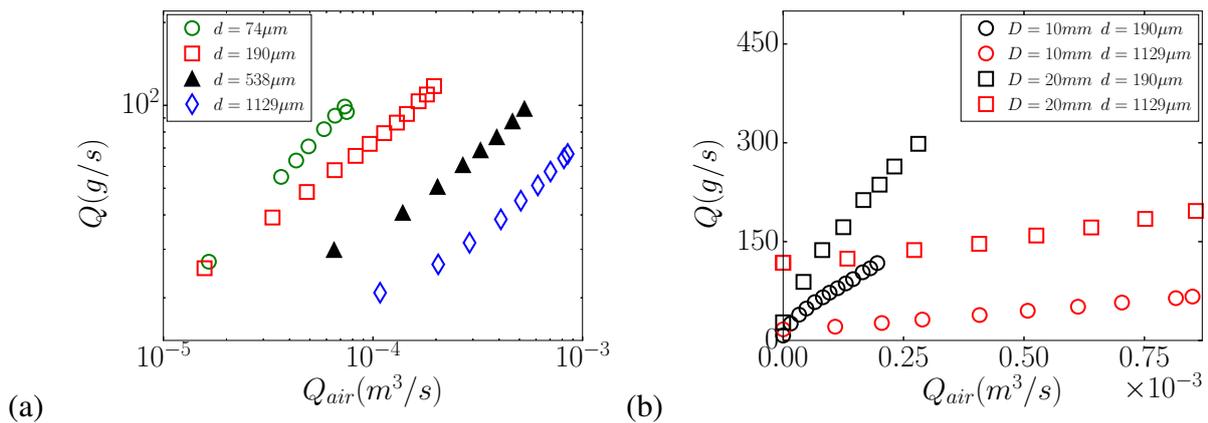


FIGURE 6.2 – Débit massique de particules pour le silo cylindrique en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour  $L = 60\text{mm}$ , (a) pour  $D = 10\text{mm}$  et différentes tailles de particules, (b) pour deux tailles de l'orifice  $D$  et deux tailles de particules  $d$ .

La figure 6.2b montre le débit massique de particules pour le silo cylindrique de diamètre  $L = 60\text{mm}$  en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour deux tailles de l'orifice  $D$  (symboles

différents) et deux tailles de particules  $d$  (couleurs différentes). Nous pouvons voir que pour chaque taille de particules la taille de l'orifice joue un rôle important sur le débit : le débit augmente avec la taille de l'orifice.

### b. Influence de la taille du silo et de la taille des particules

La figure 6.3 montre le débit massique de particules pour le silo cylindrique en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour différentes tailles de silo  $L$  (symboles différents) et différentes tailles de particule  $d$  (couleurs différentes). Nous pouvons voir qu'il n'y a pas d'influence notable de la taille du silo sur le débit de particules, pour une taille de particules données : les 3 courbes sont pratiquement superposées.

On peut noter que la gamme de débit d'air explorée est d'autant plus petite que le silo est petit. En effet, pour les silos les moins larges, la quantité de particules est faible et la vidange, dont le débit est déterminée par les autres paramètres, devient de courte durée, et ce d'autant plus que les débits (d'air et donc de particules) sont élevés. Ceci réduit d'autant la gamme de débit d'air qu'on peut explorer sans changer la hauteur du silo.

La largeur  $L$  du silo, qui ne modifie pas les débits de sortie, fait donc varier la vitesse de l'air au sein du milieu granulaire et par là-même le gradient de pression au sein du milieu poreux loin de l'orifice. Afin d'explorer des conditions de gradient de pression comparables, nous avons décalée la gamme des débits d'air vers des valeurs plus faibles pour les silos les moins larges.

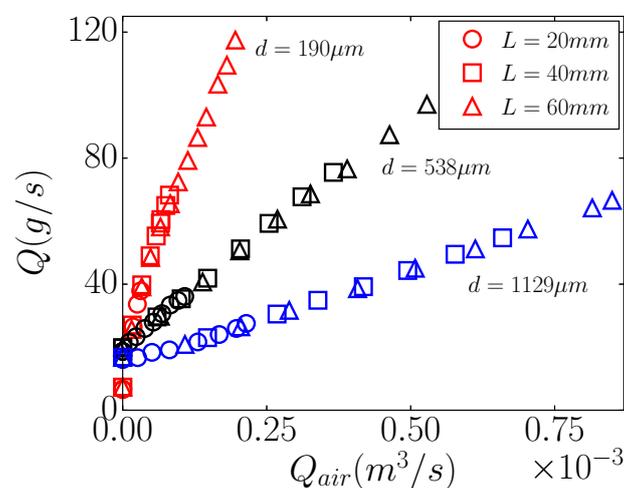


FIGURE 6.3 – Débit massique de particules pour le silo cylindrique en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour différentes tailles de silo  $L$ , différentes tailles de particules  $d$  et une taille de l'orifice donnée  $D = 10mm$ .

On peut également remarquer que la pente de ces courbes est d'autant plus grande que la taille des particules est petite : l'influence de l'injection d'air est d'autant plus importante que les particules sont petites. Cette variation est mis en évidence sur figure 6.4 qui montre le débit massique de particules pour le silo cylindrique avec  $L = 60mm$  et  $D = 10mm$  en fonction de la

taille des particules  $d$  pour différents débits volumiques d'air  $Q_{air}$ , ainsi que pour le silo ouvert. Ce dernier cas ( $\circ$ ), pour lequel la dépendance en la taille des particules est modéré, est bien ajusté par l'équation de Janda ( $---$ ).

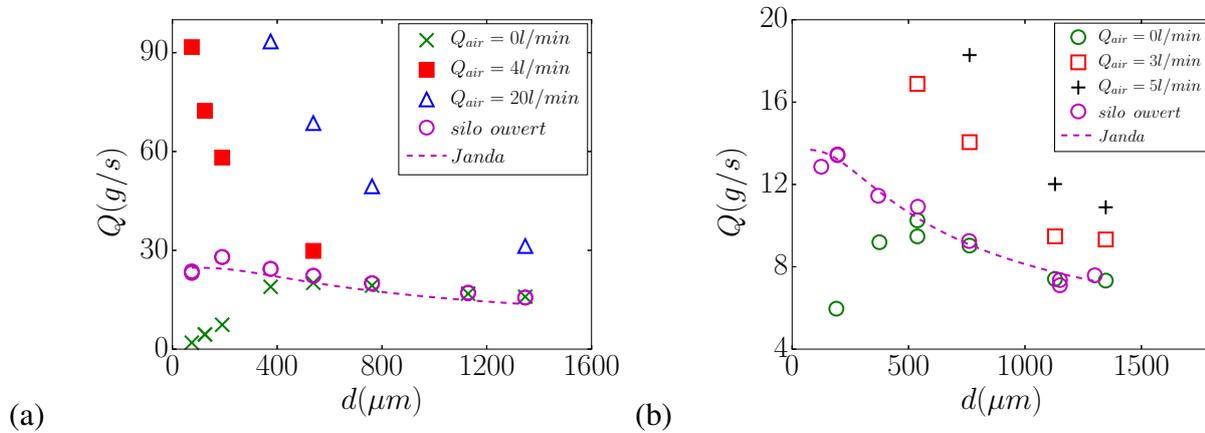


FIGURE 6.4 – Débit massique en fonction de la taille des particules  $d$  pour différents débits volumiques d'air  $Q_{air}$  (a) pour le silo cylindrique avec  $L = 60\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$ , (b) pour le silo rectangulaire avec  $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$ .

Dès lors que le haut du silo est bouché et n'est plus en équipression avec l'atmosphère à la sortie, le débit dépend fortement de la taille de particules. Dans le cas  $Q_{air} = 0\text{ l/min}$ , le débit massique est plus faible que pour le silo ouvert. Dans cette situation, un écoulement d'air à contre-courant vient compenser le volume des particules éjectées. Le débit de vidange granulaire dépend alors fortement du diamètre des particules pour les tailles les plus petites avant de rejoindre (pour  $d > 700\mu\text{m}$ ) la courbe correspondant au silo ouvert. Quand on injecte un débit volumique d'air non nul, le débit est nettement supérieur à celui du silo ouvert, notamment pour les petites particules. La courbe de débit décroît avec le diamètre des particules et tend vers celle du silo ouvert pour des diamètres de particules d'autant plus grands que le débit d'air est important. Nous retrouvons un comportement similaire dans le cas du silo rectangulaire avec  $L = 60\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$  (figure 6.4b).

La principale propriété qui dépend de la taille des particules est la perméabilité, ces résultats suggèrent que le couplage entre le fluide et les grains s'effectue principalement via la force de trainée.

## 6.1.2 Écoulement d'air

Afin de caractériser l'écoulement d'air nous disposons de capteurs de pressions, disposés sur le bord du silo cylindrique et au centre de la paroi postérieure du silo rectangulaire, à des positions verticales régulièrement espacées. Ces capteurs différentiels mesurent la pression de pore déjaugée de la pression hydrostatique,  $p^f$ .

### a. Évolution spatiale et temporelle de la pression

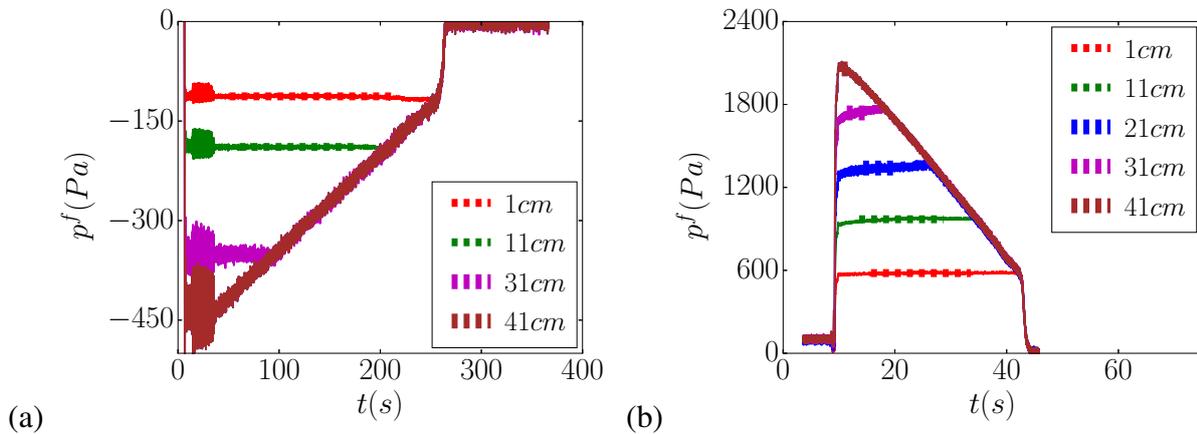


FIGURE 6.5 – Évolution temporelle de la pression le long du silo cylindrique avec  $L = 60\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$  pour (a)  $Q_{air} = 0\text{l/min}$  et  $d = 190\mu\text{m}$  et (b)  $Q_{air} = 12\text{l/min}$  et  $d = 538\mu\text{m}$ . Les lignes pointillées représentent les pressions moyennes pour différentes positions.

**Cas cylindrique** L'évolution temporelle de la pression à différentes positions au sein du silo est tracée sur la figure 6.5. Dans le cas de gauche ( $Q_{air} = 0$ ), on observe une dépression dans la colonne, ce qui correspond bien à un écoulement ascendant, donc à contre-courant de l'écoulement granulaire. Pour la valeur du débit du cas de droite, on observe une surpression, correspondant à un écoulement co-courant entre l'air et les particules. À chaque position on observe aux premiers instants de la vidange une pression constante, un plateau, suivi par une évolution quasi-linéaire se superposant aux autres signaux ayant quitté la valeur de leur plateau.

Le plateau correspond a priori aux instants pendant lesquels le capteur se trouve en dessous du niveau supérieur du milieu granulaire. En effet, puisque les débits sont stationnaires et que la perméabilité du milieu granulaire est constante, l'écart de pression avec l'atmosphère dépend a priori principalement de la perte de charge fluide entre la position du capteur et le milieu libre qui est alors constante.

L'évolution linéaire en temps correspond alors aux instants pendant lesquels le capteur se trouve au dessus du milieu granulaire. Les pertes de charge fluide dans cette zone et les variations de pression hydrostatique sont alors négligeables, la pression y est donc uniforme et les signaux des capteurs sont confondus. L'écart à la pression atmosphérique dépend alors linéairement de l'épaisseur du milieu granulaire au sein du silo, dépendant linéairement du temps pour ces cas de vidange stationnaire.

À la fin de la vidange, on observe un brusque changement de pente, quasiment un saut de pression.

**Cas rectangulaire** Dans le cas du silo rectangulaire, nous disposons de prises de pression, disposées horizontalement près de l'orifice et verticalement dans l'axe central du silo, comme on peut le voir sur la figure 6.6a où la numérotation utilisée est indiquée (l'emplacement précis est montré au chapitre 3). Les évolutions de pression représentées sur la figure 6.6 sont assez similaires. Les mesures des capteurs dans la zone la plus proche de l'orifice (capteurs 1 à 6) dont l'évolution est illustrée sur la figure 6.6c, montrent que le champ de pression est effectivement symétrique (superpositions des signaux des capteurs 1 et 3 ou 4 et 6). Le champ n'est pas uniforme pour une même élévation au sein du silo. L'écart entre les capteurs au centre et ceux sur le côté est d'autant plus marqué qu'on s'approche de l'orifice : l'écart entre le capteur 2 et les capteurs 1 ou 3 est plus important que l'écart entre le capteur 5 et le capteur 4 ou 6. Le fait que la pression est plus faible sur l'axe central indique qu'il existe un écoulement convergent d'autant plus intense qu'on s'approche de l'orifice. À la fin de la vidange, on observe également un léger saut de pression.

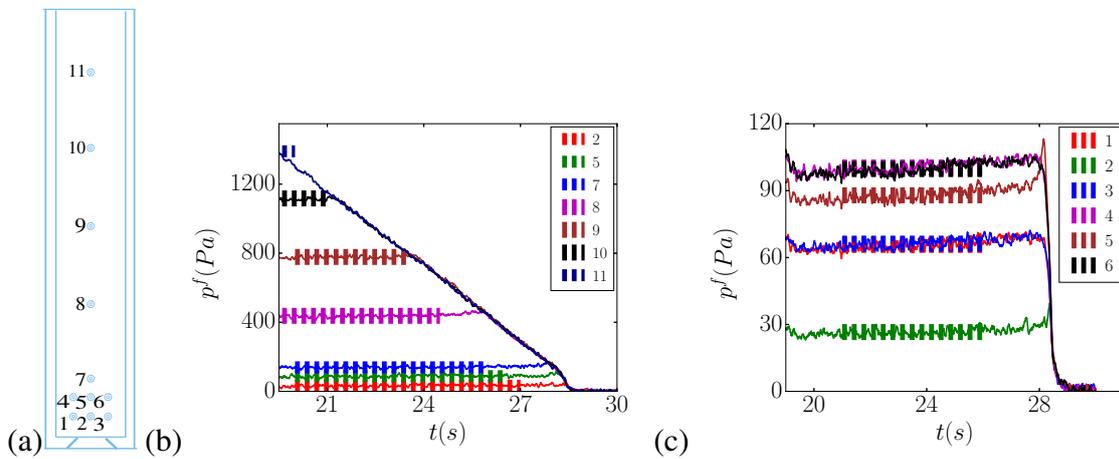


FIGURE 6.6 – (a) Numérotation des prises de pression pour le silo rectangulaire. (b,c) évolution temporelle de la pression (b) le long du silo (c) près de la sortie avec  $L = 60\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$  pour  $Q_{air} = 1\text{l/min}$  et  $d = 538\mu\text{m}$ .

**Gradient de pression vertical le long du silo** Sur la figure 6.7, nous avons représenté la valeur moyenne de la pression pendant la phase de plateau,  $p_m^f$  en fonction de la position verticale  $z$  pour différents cas. Les barres verticales et horizontales rouges autour des symboles représentent respectivement la dispersion des mesures de la pression et l'incertitude d'évaluation de la position du capteur de pression. On notera que ces sources d'incertitude sont négligeables par rapport aux grandeurs mesurées. Le premier point en  $z = 0$  correspond à l'orifice du silo qui est à pression atmosphérique, correspondant à  $p_m^f = 0$ . Le profil de pression varie rapidement dans la partie basse du silo avant d'être linéaire en fonction de l'élévation. Cette dernière tendance est cohérente avec nos commentaires sur l'évolution temporelle des signaux. Le second point de mesure représenté est bien aligné avec les points d'élévation supérieure. On estime donc que le changement de pente de la courbe se produit à son élévation, notée  $z_c$  ( $z_c = 1\text{cm}$  pour le silo cylindrique,  $z_c = 0.5\text{cm}$

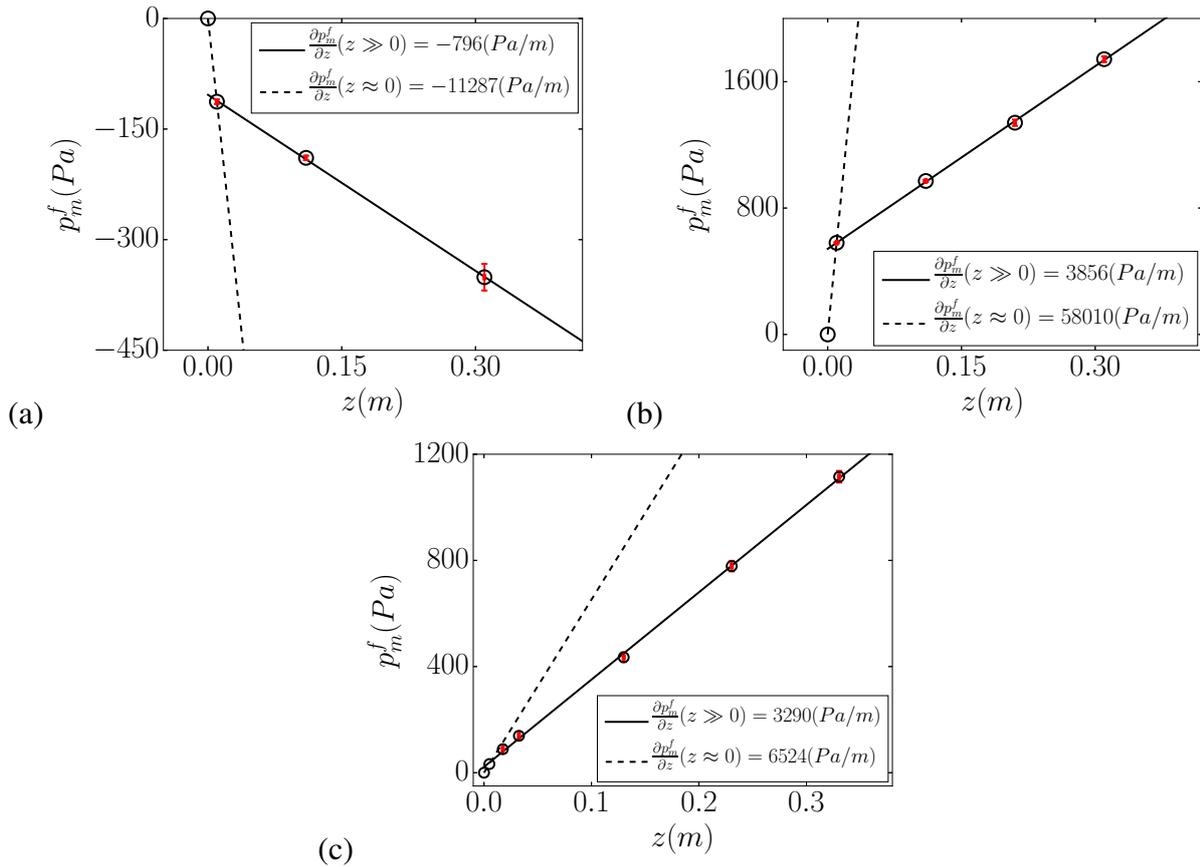


FIGURE 6.7 – Pression moyenne  $p_m^f$  du plateau en fonction de  $z$  pour (a) le silo cylindrique avec  $Q_{air} = 0$  l/min (b) le silo cylindrique avec  $Q_{air} = 12$  l/min et (c) le silo rectangulaire avec  $Q_{air} = 1$  l/min, dans les mêmes cas que sur les figures 6.5 et 6.6.

pour le silo rectangulaire). Il est alors possible d'estimer le gradient de pression fluide vertical au sein du silo en distinguant deux zones :

1. Le gradient de pression loin de l'orifice :

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \gg 0) = \frac{dp_m^f}{dz}(z \geq z_c) \quad (6.1)$$

Cette estimation est effectuée dans une zone suffisamment éloignée de l'orifice pour laquelle l'évolution de pression avec l'altitude est linéaire, ici pour  $z > z_c$  (voir la ligne solide dans les trois figures). Dans cette zone on peut également supposer que l'écoulement de l'air est vertical et homogène. Ainsi la mesure, effectuée en paroi donne une estimation fiable du gradient de pression au cœur de l'écoulement.

2. Le gradient de pression près de l'orifice :

Le brusque changement de pente de la pression en dessous de  $z_c$  indique un gradient de pression plus important. Ceci est cohérent avec une augmentation des vitesses verticales fluide et granulaire, donc de la vitesse relative liée au rétrécissement de la section de passage. Nous choisissons d'estimer le gradient de pression vertical à l'orifice en utilisant les données

du capteur situé en  $z = z_c$  (voir la ligne pointillée sur les trois figures) :

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \approx 0) \approx \frac{p_m^f(z_c)}{z_c} \quad (6.2)$$

L'exploitation de la mesure de pression dans cette zone est plus délicate car le champ de pression varie aussi horizontalement et l'évolution verticale n'est pas nécessairement linéaire. La fiabilité de l'exploitation de cette mesure du gradient de pression à l'orifice n'est donc pas évidente.

## 6.2 Modélisation diphasique

Afin de modéliser le couplage entre l'air et le milieu granulaire lors de la vidange du silo, nous nous plaçons dans le cadre général des équations à deux phases présenté dans le chapitre 2. Dans une première partie nous simplifierons ces équations pour les appliquer à notre configuration puis nous expliciterons le choix de la force de traînée. Ces équations simplifiées nous permettront de proposer d'abord un modèle asymptotique puis un modèle analytique permettant de prédire le débit de vidange d'un silo avec injection d'air.

### 6.2.1 Simplification des équations dans le système expérimental

Les équations de bilan de masse et de quantité de mouvement d'un écoulement diphasique ont été détaillées au chapitre 2 (équations 2.8 à 2.11). Pour cette étude de la vidange d'un silo avec injection d'air nous faisons les hypothèses suivantes :

(i) Nous considérons que le tenseur des contraintes fluide n'est pas influencé par le terme inertie ou la pesanteur du fluide, ces termes étant négligeables devant les forces de frottement solide-fluide à l'échelle du pore, [Nield et Bejan \[2006\]](#). Par ailleurs nous nous plaçons dans le régime stationnaire.

(ii) En suivant [Jackson \[2000\]](#), la force locale moyenne exercée par le fluide sur le solide  $f_i$  est composée d'une force de flottabilité qui s'écrit  $\phi \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j}$  et des forces de traînée liée à la vitesse relative entre les deux phases  $f_{ti}$ .

$$f_i = \phi \frac{\partial \sigma_{ij}^f}{\partial x_j} + f_{ti}, \quad (6.3)$$

(iii) Le fluide étant supposé newtonien, il se décompose en un terme de pression isotrope et un terme de contrainte lié à la viscosité. L'air étant un fluide peu visqueux nous négligerons ce deuxième terme. Le tenseur des contraintes se réduit donc au terme isotrope de pression de pore

$$\sigma_{ij}^f = -(p^f) \delta_{ij} \quad (6.4)$$

Ces hypothèses seront vérifiées a posteriori dans l'annexe A.

Si on projette les équations 2.8-2.11 sur les directions  $x$  et  $z$  en utilisant les choix de  $\sigma_{ij}^f$  et  $f_i$  expliqués précédemment, on obtient :

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(\phi u_x^p)}{\partial x} + \frac{\partial(\phi u_z^p)}{\partial z} = 0, \quad (6.6)$$

$$(1 - \phi) \frac{\partial p^f}{\partial x} + f_{tx} = 0, \quad (6.7)$$

$$(1 - \phi) \frac{\partial p^f}{\partial z} + f_{tz} = 0 \quad (6.8)$$

$$\rho_p \phi \left[ \frac{\partial u_x^p}{\partial t} + u_x^p \frac{\partial u_x^p}{\partial x} + u_z^p \frac{\partial u_x^p}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{xx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^p}{\partial z} - \frac{\partial p^f}{\partial x} \quad (6.9)$$

$$\rho_p \phi \left[ \frac{\partial u_z^p}{\partial t} + u_x^p \frac{\partial u_z^p}{\partial x} + u_z^p \frac{\partial u_z^p}{\partial z} \right] = \frac{\partial \sigma_{zx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}^p}{\partial z} - \frac{\partial p^f}{\partial z} - \phi \rho_p g \quad (6.10)$$

où  $U_i = (1 - \phi)u_i^f + \phi u_i^p$  est la vitesse du mélange et  $f_{ti}$  est la force d'interaction fluide-grains que nous discutons dans la partie suivante. Nous nous sommes basés sur ces équations pour modéliser la vidange de silo avec injection d'air.

## 6.2.2 Évaluation de la force de traînée à partir des mesures de pression

Étant donnée la gamme de débit d'air utilisé  $Q_{air} = [5 \times 10^{-6} - 8 \times 10^{-4}]m^3/s$ , le nombre de Reynolds de l'écoulement basé sur la taille des particules,  $Re_p = \rho_f u^f d / \eta \sim \rho_f Q_{air} d / (\eta S_o)$ , varie entre 0.1 et 900. Dans ces conditions nous avons choisi de représenter la force de traînée par la loi d'Ergun (équation 2.15 du chapitre 2). Le milieu granulaire étant composé de billes sphériques, la perméabilité est estimée à l'aide des lois de Kozeny-Carman (équation 2.14).

### a. Loin de l'orifice

Le bilan de quantité de mouvement dans la phase fluide (équations 6.7 et 6.8) relie le gradient de pression à la force de traînée à la valeur  $(1 - \phi)$  près. Dans la zone loin de l'orifice, l'écoulement est principalement vertical et on peut supposer qu'il est homogène dans le plan horizontal, la vitesse au centre pouvant être facilement estimée à partir du débit. D'après le modèle d'Ergun, au centre du silo loin de l'orifice en  $z = z_b$ , nous obtenons

$$\frac{\partial p^f}{\partial z}(0, z_b) = -\beta_l(\phi_b)\eta(U_z(0, z_b) - u_z^p(0, z_b)) - \beta_i(\phi_b)\rho_f d(U_z(0, z_b) - u_z^p(0, z_b))^2 \quad (6.11)$$

où  $\phi_b$  est la fraction volumique loin de l'orifice,  $\beta_l(\phi_b) = \frac{150\phi_b^2}{(1 - \phi_b)^3 d^2}$  et  $\beta_i(\phi_b) = \frac{1.75\phi_b}{(1 - \phi_b)^3 d^2}$ . Pour valider ce modèle, il faut donc évaluer le gradient de pression vertical, la vitesse du mélange  $U_z$  et la vitesse de particules  $u_z^p$  loin de l'orifice. Le gradient de pression est évalué par l'équation 6.1. La vitesse de mélange loin de l'orifice est obtenue en considérant l'air incompressible et en

écrivait la conservation du débit volumique total. Celui ci correspond au débit total en haut de la colonne, où il n'y a que de l'air

$$Q_{tot} = Q_{air} \quad (6.12)$$

où  $Q_{air}$  est le débit volumique d'air imposé. Comme nous avons supposé l'écoulement unidirectionnel, la vitesse du mélange loin de l'orifice est donnée par la vitesse moyenne et s'écrit donc :

$$U_z(0, z_b) = U_z|_{z \gg 0} = -Q_{air}/S_b \quad (6.13)$$

où  $S_b$  est la surface de la section du silo. De même, pour évaluer la vitesse des particules nous considérons la conservation du débit massique de particules  $Q$ . En haut du silo, on suppose que l'écoulement de particules est unidirectionnel, la vitesse des particules est alors donnée par

$$u_z^p(0, z_b) = u_z^p|_{z \gg 0} = -Q/(\phi_b \rho_p S_b) \quad (6.14)$$

avec  $\phi_b$  la fraction volumique du lit de particules, et  $\rho_p$  la densité de particules. L'équation 6.11 devient alors

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \gg 0) \approx \eta \beta_l(\phi_b) \frac{Q_{air} - Q/(\phi_b \rho_p)}{S_b} + \rho_f d \beta_i(\phi_b) \left( \frac{Q_{air} - Q/(\phi_b \rho_p)}{S_b} \right)^2 \quad (6.15)$$

**Cas du silo rectangulaire avec milieu granulaire statique** Dans la configuration du silo rectangulaire, de dimensions  $L = 60$ ,  $D = 10mm$  et  $W = 3.5mm$ , nous avons effectué une première série de mesures dans un cas où le lit de particules est immobile : nous avons mis un coton à la sortie du silo afin de laisser passer l'air mais pas les particules. Ainsi, la vitesse de particules est nulle,  $u_z^p = 0$ .

Nous avons tracé le gradient de pression mesuré loin de la sortie  $\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \gg 0)$  en fonction de la vitesse de l'air loin de la sortie  $\frac{Q_{air}}{S_b}$  sur la figure 6.8a. Nous pouvons voir que pour des vitesses d'air supérieure à  $0.2m/s$ , correspondant à  $Re_p = \rho_f U d / \eta > 15$ , la forme de la courbe n'est pas linéaire ce qui justifie l'utilisation de la formule d'Ergun plutôt que celle de Darcy.

Les lignes pointillées représentent l'équation 6.15 en ajustant uniquement le paramètre  $\phi_b$  par la méthode des moindres carrés. La fraction volumique du milieu granulaire est estimée indépendamment par la valeur  $\phi_{b_i}$  mesurée avant l'injection d'air. Nous avons tracé  $\phi_b / \phi_{b_i}$  en fonction de  $d$  sur la figure 6.8b et nous observons que  $\phi_b \approx 1.1 \phi_{b_i}$ . Ce résultat, proche de 1, est cohérent avec l'observation visuelle d'une légère compaction de la colonne au début de l'expérience.

Le modèle d'Ergun en utilisant la perméabilité de Kozeny-Carman permet donc d'ajuster nos résultats expérimentaux dans la zone loin de l'orifice en l'absence de mouvement du milieu granulaire.

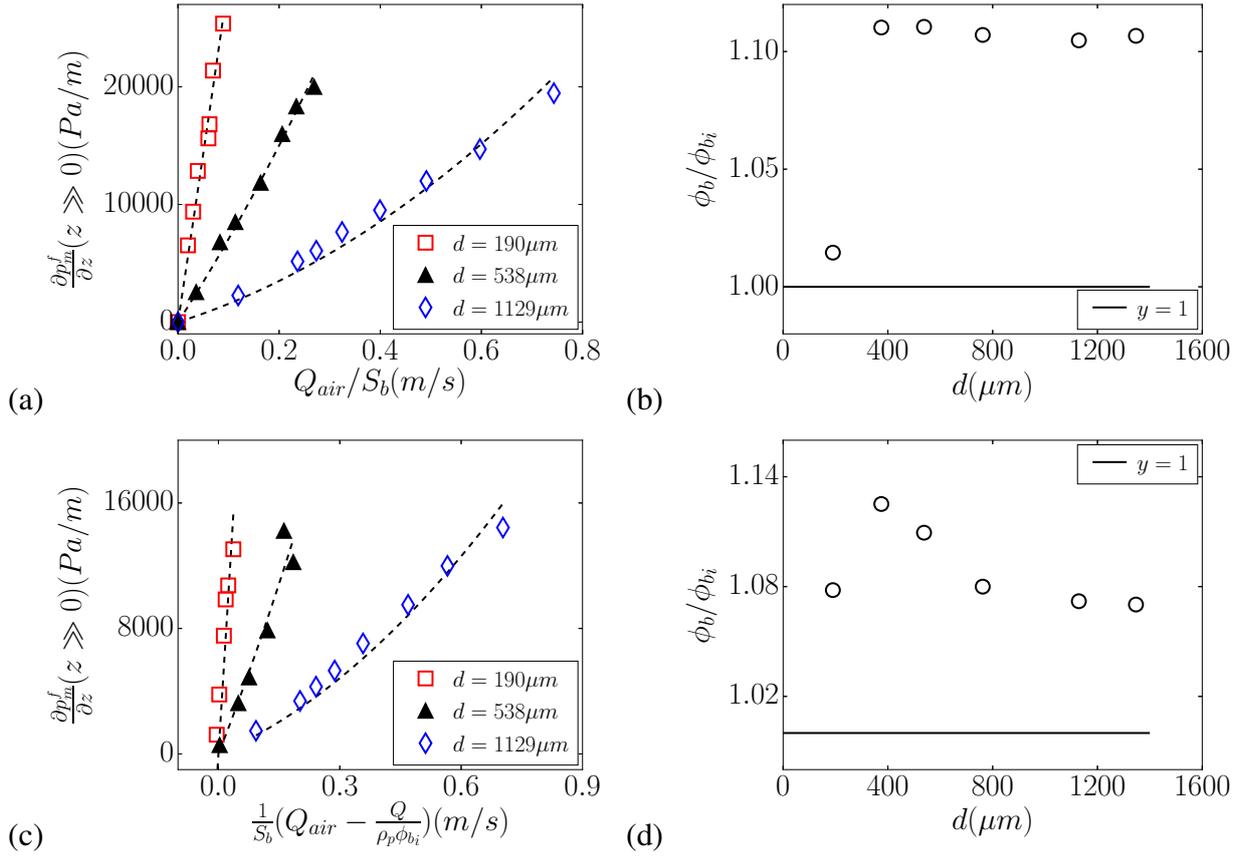


FIGURE 6.8 – Résultats du silo rectangulaire avec  $L = 60$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$ . (a,b) dans un cas où les particules sont immobiles et (c,d) pour la vidange du silo. (a,c) Le gradient de pression loin de la sortie  $\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \gg 0)$  en fonction de la vitesse relative de l'air et des grains évaluée par (a)  $\frac{Q_{air}}{S_b}$  et (c)  $\frac{1}{S_b}(Q_{air} - \frac{Q}{\rho_p \phi_{bi}})$  pour trois tailles de particules  $d$ . Les lignes pointillées représentent l'équation 6.15 en ajustant  $\phi_b$  par la méthode moindres carrés. (b,d)  $\phi_b$  obtenu adimensionné par la fraction volumique initiale  $\phi_{bi}$  en fonction de  $d$ . La ligne horizontale représente  $y = 1$ .

**Cas du silo rectangulaire avec écoulement de particules** Dans le cas où les grains s'écoulent et le silo se vidange, nous avons tracé sur la figure 6.8c le gradient de pression vertical loin de la sortie en fonction de  $[Q_{air} - Q/(\rho_p \phi_{bi})]/S_b$  où nous avons choisi d'utiliser la valeur initiale de la fraction volumique dans l'évaluation de la vitesse des particules. Ce choix se justifie par le fait que (i) on peut estimer que la fraction volumique va varier faiblement par rapport à sa valeur initiale, (ii) le débit volumique des particules reste relativement faible par rapport à celui de l'air. Puis, comme dans le cas sans écoulement nous avons ajusté les courbes obtenues par l'équation 6.15 en utilisant la méthode des moindres carrés avec le paramètre  $\phi_b$  comme unique paramètre ajustable dans les formules de  $\beta_i$  et  $\beta_o$ . Nous retrouvons sur la figure 6.8d que la fraction volumique est équivalente à la fraction volumique initiale avec une légère compaction  $\phi_b \approx 1.08\phi_{bi}$ . Ce résultat est proche de celui obtenu dans le cas statique, l'écoulement granulaire en présence de fluide ne semble pas influencer l'empilement des particules loin de l'orifice.

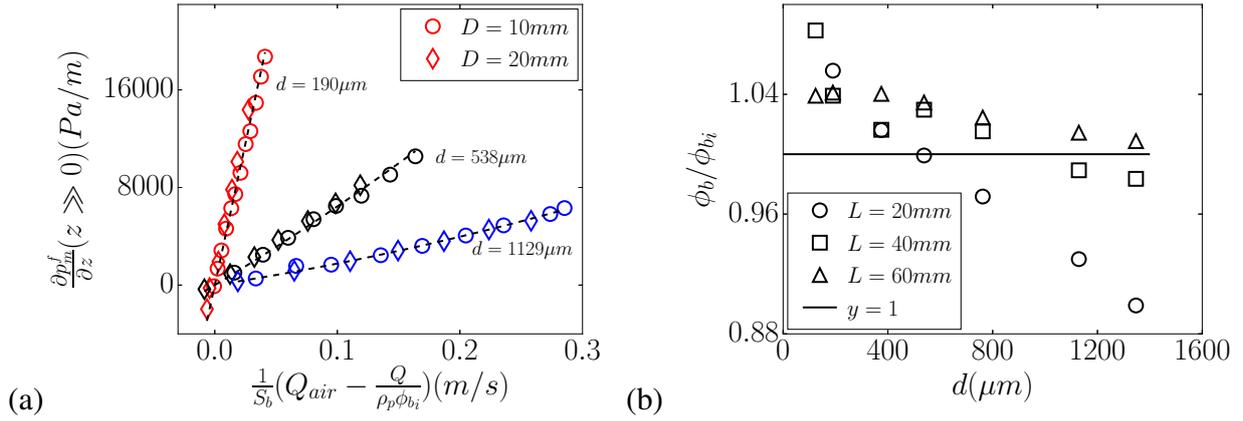


FIGURE 6.9 – Résultats du silo cylindrique. (a) Gradient de pression loin de la sortie  $\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \gg 0)$  mesuré en fonction de la vitesse relative entre les deux phases loin de la sortie évalué par  $[Q_{air} - Q/(\rho_p \phi_{bi})]/S_b$  pour  $L = 60 mm$ , deux tailles de l’orifice  $D$  et trois tailles de particules  $d$ . Les lignes pointillées représentent l’équation 6.15 en ajustant  $\phi_b$  par la méthode moindres carrés. (b)  $\phi_b$  obtenu adimensionné par la fraction volumique initiale  $\phi_{bi}$  en fonction de  $d$ . La ligne horizontale représente  $y = 1$ .

**Cas du silo cylindrique** Nous avons mené la même étude dans le cas de la vidange du silo cylindrique. La figure 6.9a montre le gradient de pression mesuré loin de la sortie en fonction de la vitesse relative entre les deux phases loin de la sortie, évalué par  $[Q_{air} - Q/(\rho_p \phi_{bi})]/S_b$  pour deux tailles de l’orifice et trois diamètres de particules. Les données pour les deux tailles de l’orifice sont superposées ce qui correspond bien au fait que la fraction volumique loin de l’orifice est indépendante de la taille de ce dernier. On retrouve que les courbes sont bien ajustées par l’équation 6.15 et la valeur de la fraction volumique obtenue, tracée sur la figure 6.9b, est également comparable à la valeur initiale, avec une légère compaction pour les billes les plus petites.

Ces résultats nous confortent dans l’utilisation de la loi d’Ergun (équation 2.15) pour modéliser la force de trainée.

## b. Mesures de pression proche de l’orifice

Au centre de l’orifice du silo le modèle d’Ergun s’écrit

$$\frac{\partial p^f}{\partial z}(0, 0) = -\beta_l(\phi_o)\eta(U_z(0, 0) - u_z^p(0, 0)) - \beta_i(\phi_o)\rho_f d(U_z(0, 0) - u_z^p(0, 0))^2$$

où nous définissons  $\phi_o$  comme la fraction volumique locale au centre de l’orifice. Cette valeur n’est pas mesurée et s’écarte a priori de la valeur au sein du silo comme nous l’ont appris nos études sur la vidange d’un milieu granulaire sans écoulement d’air. On peut néanmoins tenter de la déduire des mesures de pression et de débit en utilisant le modèle d’Ergun et en posant plusieurs hypothèses. D’abord nous supposons que le gradient de pression peut être évalué expérimentalement

en utilisant l'équation 6.2 :

$$\frac{\partial p^f}{\partial z}(0, 0) \approx \frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \approx 0)$$

À l'orifice l'écoulement vertical n'est pas homogène, néanmoins nous connaissons les valeurs moyennes des vitesses par la conservation des différents débits :

$$U_z|_{z=0} = -Q_{air}/S_o \quad (6.16)$$

$$u_z^p|_{z=0} = -Q/(\bar{\phi}_o \rho_p S_o) \quad (6.17)$$

où  $S_o$  est la surface de l'orifice et  $\bar{\phi}_o$  est la fraction volumique moyenne de particules sur l'orifice. Dans la plupart des conditions où nous travaillons l'écoulement de l'air est plus rapide que l'écoulement des particules  $u_z^p \ll u_z^f$  et on peut supposer qu'il est relativement homogène, soit  $U_z(0, 0) \approx U_z|_{z=0}$ . Dans le cas d'un silo ouvert comme nous l'avons vu dans le chapitre 4, les profils de vitesse de particules et de fraction volumique dans l'ouverture ne sont pas homogènes, cependant ils sont auto-similaire avec la taille de l'ouverture. En supposant que cette observation reste vraie en présence d'un écoulement d'air nous pouvons écrire que  $\bar{\phi}_o u_z^p|_{z=0} \approx k_1 \phi_o u_z^p(0, 0)$ , où  $k_1$  est une constante d'ordre 1. Par souci de simplicité nous allons supposer que  $u_z^p(0, 0) = -Q/(\phi_{bi} \rho_p S_o)$ , c'est à dire  $k_1 \approx 1$  et  $\phi_o \approx \phi_{bi}$ . Ce terme étant dans la plupart des cas faible devant la vitesse de mélange nous pouvons supposer que cette hypothèse engendre une erreur relativement faible. L'équation 6.11 s'écrit alors

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial z}(z \approx 0) \approx \eta \beta_l(\phi_o) \frac{Q_{air} - Q/(\phi_{bi} \rho_p)}{S_o} + \rho_f d \beta_i(\phi_o) \left( \frac{Q_{air} - Q/(\phi_{bi} \rho_p)}{S_o} \right)^2 \quad (6.18)$$

On considère l'ajustement de cette formule sur nos mesures par le seul paramètre  $\phi_o$ . Cette estimation de  $\phi_o$  est présentée dans les figures 6.10a,c et 6.11a pour différents cas où l'on peut voir que les mesures sont bien ajustées par la formule. Les valeurs de  $\phi_o/\phi_{bi}$  sont tracées dans les figures 6.10b,d et 6.11b en fonction de  $D/d$ .

Pour le silo rectangulaire, dans le cas où les particules sont immobiles (figure 6.10b) la fraction volumique à la sortie est équivalente à celle mesurée initialement dans l'ensemble du silo suite au remplissage. Ceci permet de vérifier que, dans le cas où les particules ne bougent pas, la fraction volumique est homogène au sein du silo. Par contre, dès lors qu'il y a un écoulement (figure 6.10d) nous observons une dilatation à la sortie comme dans le cas du silo ouvert (Janda *et coll.* [2012], voir le chapitre 4). Cette dilatation est d'autant plus grande que le nombre de billes dans la largeur de l'ouverture est faible et peut être ajusté par l'équation :

$$\phi_o/\phi_{bi} = \xi_\phi G(D/d) = \xi_\phi [1 - \alpha e^{-\beta D/d}]. \quad (6.19)$$

Les coefficients obtenus  $\xi_\phi = 0.86$ ,  $\alpha = 0.64$ , et  $\beta = 0.16$  sont du même ordre de grandeur que ceux obtenu dans le cas du silo ouvert.

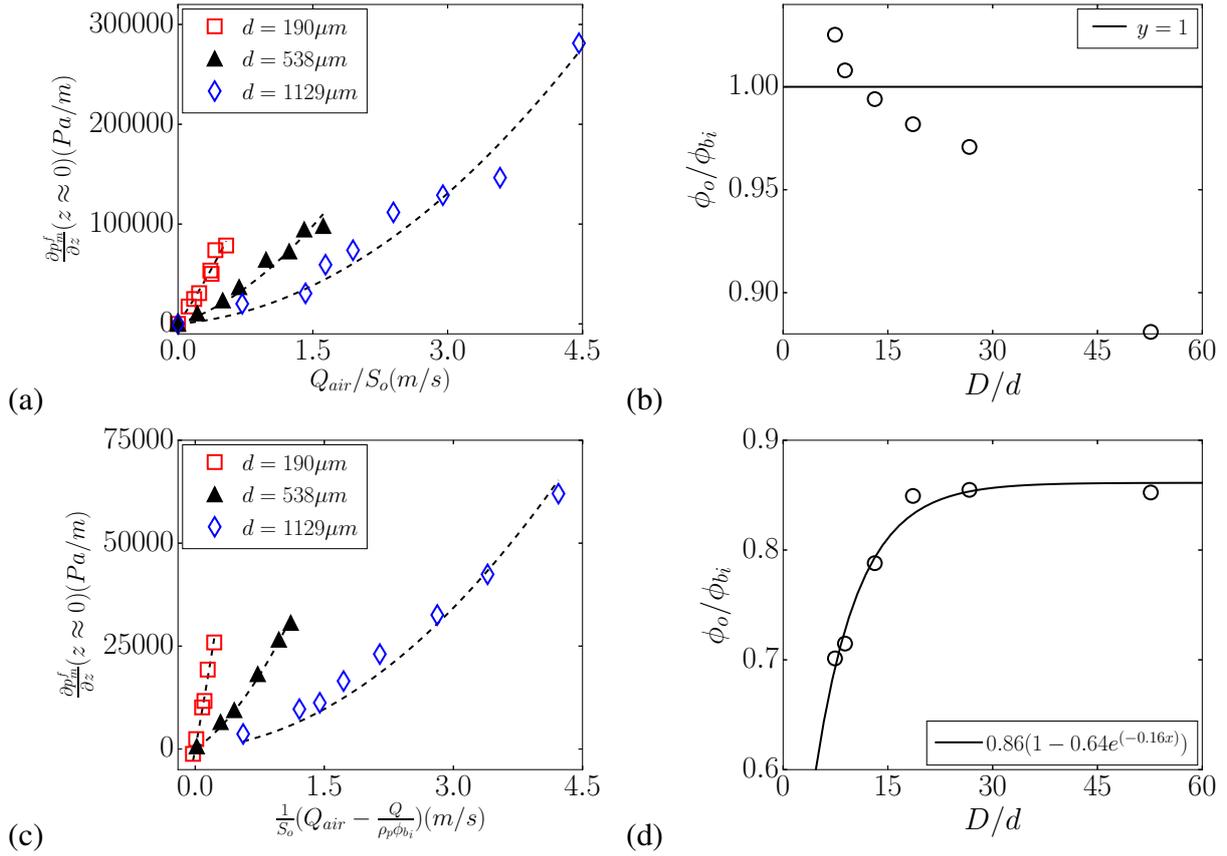


FIGURE 6.10 – Résultats du silo rectangulaire avec  $L = 60$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$ . (a,b) dans un cas où les particules sont immobiles et (c,d) pour la vidange du silo. (a,c) Le gradient de pression proche de la sortie  $\frac{\partial p^f}{\partial z}(z \approx 0)$  mesuré en fonction de la vitesse relative de l'air et des grains loin de la sortie évalué par (a)  $\frac{Q_{air}}{S_o}$  et (c)  $\frac{1}{S_o}(Q_{air} - \frac{Q}{\rho_p \phi_{bi}})$  pour trois tailles de particules. Les lignes pointillées représentent l'équation 6.18 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode moindre carrée, (b,d)  $\phi_o/\phi_{bi}$  en fonction de  $D/d$ . La courbe en trait plein représente (b)  $y = 1$  et (d) l'équation 7.5 avec  $\xi_\phi = 0.86$ ,  $\alpha = 0.64$ , et  $\beta = 0.16$ .

Dans le cas du silo cylindrique, l'estimation du gradient vertical de pression à la sortie à partir des mesures de pression est plus délicate car les capteurs sont situés sur la paroi du cylindre dans une zone potentiellement mortes de l'écoulement. Néanmoins, on constate que la fraction volumique estimée, représentée sur la courbe 6.11b a des valeurs cohérentes. On observe notamment, et de manière similaire à la vidange du silo rectangulaire, une dilatation d'autant plus grande que le nombre de billes dans l'ouverture est faible et bien ajustée par l'équation 7.5. Les coefficients obtenus  $\xi_\phi = 0.9$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ , sont également comparables à ceux obtenus dans le cas du silo ouvert.

Les mesures de pression le long des silos rectangulaires et cylindriques, sont bien représentées par le modèle d'Ergun et la perméabilité de Kozeny-Carman. Ainsi, il semble justifier d'utiliser ce modèle pour estimer la force de traînée. Son utilisation permet de montrer que le milieu granulaire se dilaterait à la sortie du silo quand le nombre de particules dans l'ouverture est faible. Cette dilatation semble comparable à celle observée dans le cas d'une vidange simple avec un silo ouvert

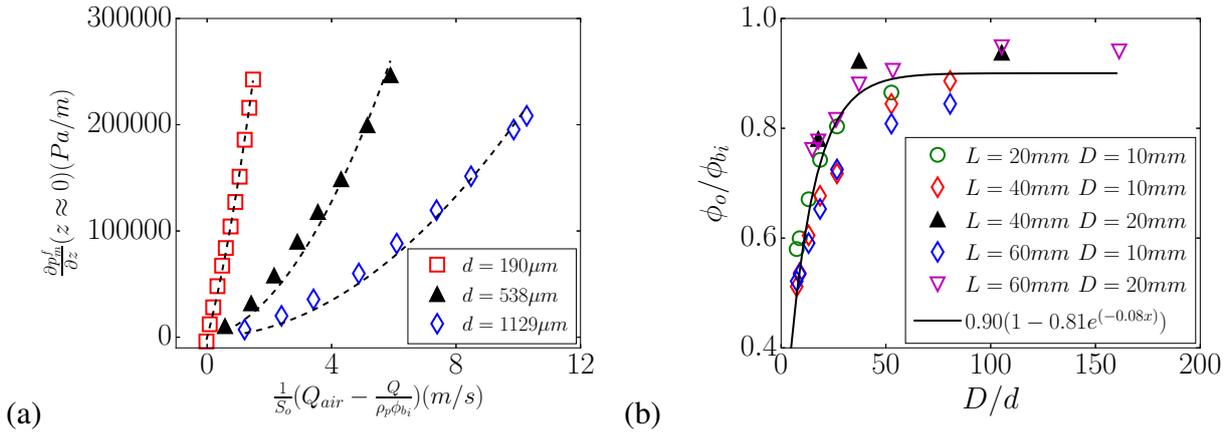


FIGURE 6.11 – Résultats du silo cylindrique. (a) Gradient de pression près de la sortie  $\frac{\partial p^f}{\partial z}|_{z=0}$  mesuré en fonction de  $[Q_{air} - Q/(\rho_p \phi_{bi})]/S_o$  pour  $L = 60 mm$ ,  $D = 10 mm$  et trois tailles de particules  $d$ . Les lignes pointillées représentent l'équation 6.15 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode des moindres carrés, (b)  $\phi_b/\phi_{bi}$  en fonction de  $d$ . La courbe en trait plein représente l'équation 7.5 avec  $\xi_\phi = 0.9$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ .

discutée dans le chapitre 4 ce qui suggère que l'écoulement d'air ne perturbe pas l'arrangement spatial du milieu granulaire. Le débit de particule étant fortement influencé par le débit d'air, cela suggère également que cet empilement correspond à un effet géométrique et dépend principalement du nombre de particules dans l'ouverture et non du débit des particules (que notre variation du débit d'air permet de faire varier).

### 6.2.3 Modèles asymptotiques

Dans les deux cas extrêmes où le lit de particules est très peu perméable ou très perméable nous pouvons prédire le débit massique de particules pour des débit d'air modérés.

#### a. Régime très peu perméable

Dans le cas d'un lit de particule très peu perméable, l'air injecté s'écoule difficilement au sein du milieu granulaire. Il va donc s'accumuler au dessus de la colonne de grain. En supposant que sa densité ne varie pas (du fait d'une relativement faible variation de pression absolue), le volume au dessus de la colonne de grain augmente quasiment au rythme du débit volumique d'air, ce qui impose un débit volumique de particules à l'orifice équivalent, soit :

$$Q/(\rho_p \phi_o) = Q_{air} \quad (6.20)$$

où  $\phi_o$  est la fraction volumique au niveau de l'orifice. Les cas peu perméables correspondent à des petits grains, or selon la loi de Janda (Janda *et coll.* [2012]), on a  $\phi_o \approx \phi_b$  quand  $d \ll D$ , donc le

débit de particules dans ce régime peut être décrit par :

$$Q = \rho_p \phi_b Q_{air} \quad (6.21)$$

Ainsi, dans ce régime où le milieu granulaire est très peu perméable le débit de particules ne dépend que du débit d'air injecté et ne dépend plus de la taille de l'orifice. Pour vérifier cette tendance nous avons tracé sur la figure 6.12a le débit massique de particules  $Q$  en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour le silo cylindrique dans le cas du milieu le moins perméable considéré, à savoir celui des particules les plus petites  $d = 74\mu m$ . Nous observons bien que le débit de particules ne dépend effectivement que du débit d'air  $Q_{air}$  pour cette taille de particules et non de  $L$  ou  $D$ . L'équation 6.21 ajuste bien les résultats expérimentaux (ligne pointillée). Il est à noter que pour ces petites particules de taille inférieure à  $100\mu m$ , pour des débits d'air faibles correspondant à des écoulements à contre-courant de celui des particules nous avons observé des oscillations importantes des pressions et des débits de particules, ainsi que des créations de poches d'air. La valeur seuil du débit d'air menant à un écoulement à contre-courant est a priori celle correspondant à un débit volumique d'air égal au débit volumique de particules pour le silo ouvert.

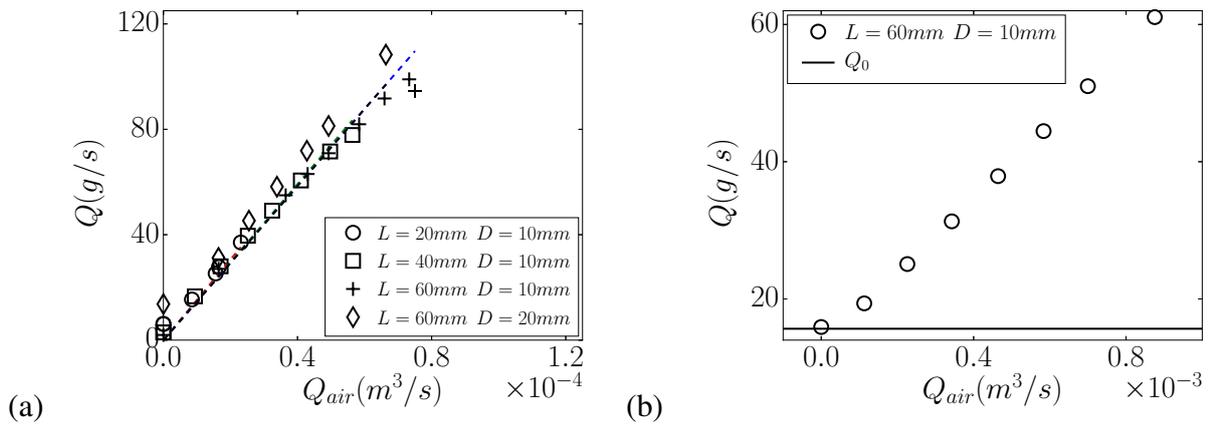


FIGURE 6.12 – Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air pour le silo cylindrique (a) dans le cas d'une taille de particules  $d = 74\mu m$  pour différentes tailles de silo  $L$  et différentes tailles de l'orifice  $D$ . Les lignes pointillées représentent l'équation 6.21, (b) dans le cas  $d = 1347\mu m, L = 60mm$  et  $D = 10mm$ . La ligne horizontale représente le débit de particules sans effet d'air.

## b. Régime très perméable

Dans le cas des régimes très perméables et des débits d'air modérés, on peut supposer que l'air va passer aisément à travers le milieu granulaire sans le perturber. Ainsi, même pour un silo bouché, l'écoulement à contre-courant perturbera peu le débit granulaire. Le débit de particules

sera alors le même que dans le cas ouvert :

$$Q \approx Q_0 \quad (6.22)$$

Sur la figure 6.12b nous avons tracé le débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour le silo cylindrique ( $L = 60mm$  et  $D = 10mm$ ) dans le cas la taille de particules la plus grande  $d = 1347\mu m$ . La ligne horizontale représente le débit de particules sans effet d'air. Nous retrouvons bien que, pour un débit d'air injecté nul,  $Q_{air} = 0$ , on retrouve le débit du cas ouvert et  $Q$  ne devient ainsi jamais inférieur à cette valeur. Il faudrait imposer un écoulement d'air avec un débit volumique négatif pour diminuer  $Q$ . Les débits d'air positifs que l'on a imposés sont relativement importante car nous avons cherché à conserver l'ordre de grandeur du gradient de pression au sein du milieu granulaire. Ainsi, les valeurs du débit granulaire s'écartent naturellement de la valeur asymptotique du régime très perméable.

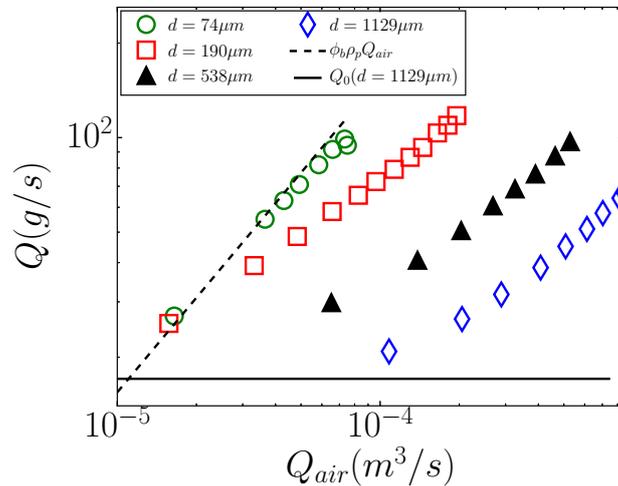


FIGURE 6.13 – Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour le silo cylindrique avec  $L = 60mm$ ,  $D = 10mm$  pour différentes tailles de particules. La ligne pointillée représente l'équation  $\phi_b Q_{air}$ , la ligne solide représente le débit volumique moyen du silo ouvert dans le cas  $d = 1129\mu m$ .

Les deux régimes asymptotiques sont représentés sur la figure 6.13 où l'on a tracé le débit massique des particules en fonction du débit volumique de l'air pour 4 diamètres de particules dans le cas du silo cylindrique ( $L = 60mm$ ,  $D = 10mm$ ). Cette figure est en échelle logarithmique et le régime peu perméable est représenté par les traits pointillés alors que le régime très perméable est représenté par le trait plein. On peut noter que dans la gamme des tailles de particule explorée, on tend vers ces deux régimes pour des faibles débits d'air. Les particules les plus petites ( $< 100\mu m$ ) étant bien représentées par l'équation 6.21, nous ne les avons pas utilisées dans l'étude suivante où nous proposons une modélisation simple de la vidange du silo entre ces deux régimes asymptotiques.

## 6.2.4 Modélisation de la vidange d'un silo soumis à un écoulement de gaz

### a. Débit de particules en fonction de la traînée

Afin de modéliser l'effet d'un écoulement de gaz sur la vidange de silo, il a été proposé dans la littérature, JONG [1969], JONG et Hoelen [1975], Nedderman *et coll.* [1983b], de modifier la dépendance du débit de vidange d'un silo en sa force motrice pour un silo ouvert,  $g$ , en lui ajoutant une estimation de la force volumique entre les particules et l'écoulement d'air, la traînée, elle-même estimée par le gradient de pression fluide. Dans ces études, le débit de vidange est représenté par une loi de Beverloo, et la traînée est estimée par une loi de type Darcy ou Ergun. Cette traînée est reliée à la valeur du gradient de pression fluide. Conformément à l'explication phénoménologique classique de la loi de Beverloo, le débit de particules est associé à une chute libre en dessous d'une arche dynamique à une distance de l'orifice égale à sa taille. Ainsi, le gradient de pression considéré dans ces études est estimé au niveau de cette arche.

Nous proposons de reproduire la démarche de la littérature en l'adaptant aux résultats que nous avons obtenus sur la vidange d'un silo ouvert. Ainsi, à la place de la loi de Beverloo, nous considérons la loi développée par Janda *et coll.* [2012] pour modéliser la vidange simple de silo et que nous avons retrouvé dans nos expériences (chapitre 2, équations 2.21 et 2.23) :

$$\phi_o = \xi_\phi \phi_b G(D/d) = \xi_\phi \phi_b (1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{a}}) \quad (6.23)$$

$$Q_0 = c \phi_o \rho_p S_o (gD)^{1/2} = C \phi_b G(D/d) \rho_p S_o \sqrt{gD} \quad (6.24)$$

Afin de différencier le cas du silo ouvert, nous continuons de noter  $Q$  le débit massique de particules et introduisons la notation  $Q_0$  pour le cas ouvert.  $\phi_o$  est la fraction volumique moyenne à l'orifice et  $\phi_b$  la fraction volumique de la colonne au remplissage. Les expressions particulières de cette loi pour les géométries considérées et les valeurs des coefficients empiriques sont alors

$$Q_0 = C' \phi_b \rho_p (1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{a}}) \sqrt{gD^5} \quad \text{pour le silo cylindrique} \quad (6.25)$$

$$Q_0 = C' \phi_b \rho_p (1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{a}}) W \sqrt{gD^3} \quad \text{pour le silo rectangulaire} \quad (6.26)$$

Avec  $C' = 0.54$   $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$  pour le silo cylindrique et  $C' = 0.86$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$  pour le silo rectangulaire (voir le chapitre 4).

En ce qui concerne l'estimation de la force volumique ressentie par les particules et s'ajoutant à la gravité dans les expressions précédentes du débit granulaire, nous considérons dans un premier temps son estimation par la mesure expérimentale du gradient de pression au niveau de l'orifice, soit

$$Q = C \phi_o \rho_p S_o (D)^{1/2} \left( g + \frac{1}{\phi_o \rho_p} \frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_{z=0} \right)^{1/2} \quad (6.27)$$

où la valeur du gradient de pression est déduite des mesures de pression en bas du silo par l'équation 6.2.

Enfin, il est supposé que la dilatance de l'écoulement granulaire en présence d'écoulement d'air n'est pas modifiée par rapport au cas du silo ouvert et qu'en facteur du terme de pression la variation de la fraction volumique joue un rôle faible soit  $\phi_o \approx \phi_b$ , ce qui permet alors d'exprimer le débit granulaire  $Q$ , pour le cas du silo cylindrique par

$$\frac{Q}{\phi_b \rho_p \sqrt{\left(g + \frac{1}{\phi_b \rho_p} \frac{\partial p_m^f}{\partial z} \Big|_{z=0}\right) d^5}} = C' (1 - \alpha e^{-\beta \frac{D}{d}}) \left(\frac{D}{d}\right)^{5/2} \quad (6.28)$$

On a représenté l'adéquation de cette estimation du débit pour l'ensemble des expériences réalisées sur la figure 6.14. La ligne solide rouge représente le membre de droite de l'équation précédente en utilisant les valeurs des coefficients empiriques obtenues dans l'étude d'un silo ouvert pour le silo cylindrique. L'excellent accord entre les valeurs mesurées et prédites nous conforte dans l'approche suivie. Le débit granulaire est notamment très bien corrélé au gradient de pression fluide à l'orifice. Or nous avons vu que ce gradient de pression à l'orifice pouvait être estimé à partir des modèles d'Ergun et de Kozeny-Carman et de la valeur de  $Q_{air}$ . On propose donc dans la suite un modèle analytique simple qui relie le débit de particules  $Q$  aux paramètres imposés expérimentalement  $Q_{air}$ ,  $D$  et  $d$ .

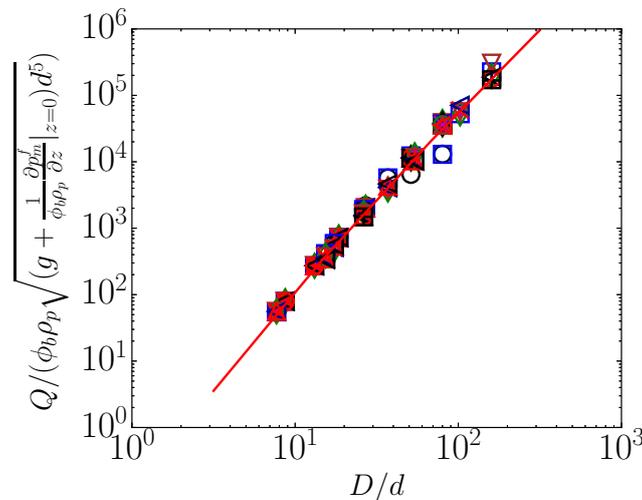


FIGURE 6.14 – Débit massique de particules  $Q$  adimensionné par  $\phi_b \rho_p \sqrt{\left(g + \frac{1}{\phi_b \rho_p} \frac{\partial p_m^f}{\partial z} \Big|_{z=0}\right) d^5}$  pour toutes les expériences réalisées dans le silo cylindrique avec  $L = 60mm$ . La ligne rouge représente l'équation 6.28 avec  $C' = 0.54$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ .

## b. Un modèle analytique simple

On rappelle que le gradient moyen de pression fluide au centre de l'orifice est bien représenté par l'équation 6.18. Ainsi l'équation reliant le débit granulaire  $Q$  en présence d'écoulement au

débit du silo ouvert  $Q_0$  s'écrit

$$Q = Q_0 \left[ 1 + \frac{\eta\beta_l(\phi_o)}{\phi_o\rho_p g S_o} \left( Q_{air} - \frac{Q}{\phi_o\rho_p} \right) + \frac{\rho_f d\beta_i(\phi_o)}{\phi_o\rho_p g S_o^2} \left( Q_{air} - \frac{Q}{\phi_o\rho_p} \right) \left| Q_{air} - \frac{Q}{\phi_o\rho_p} \right| \right]^{1/2}$$

**Analyse des solutions mathématiques du modèle** On introduit alors les débits réduits par le débit  $Q_0$ , à savoir  $\bar{Q} = Q/Q_0$  et  $\tilde{Q} = Q_{air}\phi_o\rho^p/Q_0$ . Les termes associés aux perméabilités dans les régimes visqueux et inertiel définissent naturellement les nombres sans dimensions suivant

$$\mathcal{N}_l = \frac{\eta\beta_l(\phi_o)Q_0}{\phi_o^2\rho_p^2 g S_o}$$

$$\mathcal{N}_i = \frac{\rho_f d\beta_i(\phi_o)Q_0^2}{\phi_o^3\rho_p^3 g S_o^2}$$

On note alors que la modélisation de type Darcy revient à supposer que  $\mathcal{N}_i = 0$ . On remarque que la formulation n'est valable mathématiquement que dans le cas pour lequel la valeur du gradient de pression ne compense pas la gravité, auquel cas le terme dans la racine carrée n'est plus défini. Ce cas correspondrait à un écoulement d'air à contre-courant tellement intense qu'il inverserait le sens du débit granulaire. Ce cas est exclu des configurations étudiées dans le cadre de notre étude et nous ne le considérerons pas. Une seconde complexité analytique de ce modèle repose sur la présence de la valeur absolue de la vitesse relative dans le terme inertiel du modèle d'Ergun. Ce changement de signe du terme correspond à la transition entre le régime d'écoulements d'air et de particule co-courant et le régime à contre-courant. Cette transition se réalise naturellement lorsque le débit volumique d'air injecté en haut du silo correspond exactement au débit d'un silo ouvert, soit  $\tilde{Q} = 1$ . Pour  $\tilde{Q} < 1$ , on observe un écoulement à contre-courant au niveau de l'orifice ( $\tilde{Q} - \bar{Q} < 0$ ) et  $\bar{Q} < 1$ . La réciproque vaut pour l'écoulement co-courant. Ainsi le signe de  $(\tilde{Q} - \bar{Q})$  est celui de  $\tilde{Q} - 1$ . Ce terme ne dépend que des conditions expérimentales, tandis que le premier dépend du résultat de l'expérience  $Q$ . Pour condenser l'expression analytique de notre modèle, on introduit alors la notation suivante

$$\pm = \frac{\tilde{Q} - 1}{|\tilde{Q} - 1|} \quad (6.29)$$

Le cas potentiellement ambigu pour lequel  $\tilde{Q} = 1$  correspond en fait au cas trivial  $\bar{Q} = 1$  ce qui reste vrai pour les deux valeurs possibles de  $\pm$  soit 1 ou  $-1$ .

Le modèle analytique proposé revient alors à ce que  $\bar{Q}$  vérifie l'équation suivante

$$(1 \mp \mathcal{N}_i) \bar{Q}^2 + (\mathcal{N}_l \pm 2\mathcal{N}_i\tilde{Q}) \bar{Q} - (1 + \mathcal{N}_l\tilde{Q} \pm \mathcal{N}_i\tilde{Q}^2) = 0 \quad (6.30)$$

Il s'agit d'un polynôme de degré 2 en  $\bar{Q}$  ce qui se résout donc trivialement. La solution du modèle <sup>1</sup>

1. On ne conserve que la racine la plus grande, assurant ainsi la positivité de  $Q$  comme il a été déjà commenté.

s'écrit donc

$$\bar{Q} = \frac{(\mp 2\mathcal{N}_i \tilde{Q} - \mathcal{N}_l) + \sqrt{\Delta}}{2(1 \mp \mathcal{N}_i)} \quad (6.31)$$

avec

$$\Delta = \mathcal{N}_l^2 + 4(1 + \mathcal{N}_i \tilde{Q}) \pm 4\mathcal{N}_i(\tilde{Q}^2 - 1) \quad (6.32)$$

Les nombres  $\mathcal{N}_l$  et  $\mathcal{N}_i$  sont positifs. On considère uniquement les cas  $\tilde{Q} > 0$  et on a toujours  $\pm(\tilde{Q}^2 - 1) > 0$ . Ainsi,  $\sqrt{\Delta}$  est toujours bien défini et notre modèle a bien une solution mathématique cohérente.

Dans le cas de Darcy la solution s'écrit de manière plus simple, à savoir

$$\bar{Q} = \frac{\sqrt{\mathcal{N}_l^2 + 4(1 + \mathcal{N}_i \tilde{Q})} - \mathcal{N}_l}{2} \quad (6.33)$$

On s'intéresse alors aux cas asymptotiques des régimes peu ou très perméables. Le régime très perméable, correspondant aux cas des grosses particules ( $\mathcal{N}_l \simeq \mathcal{N}_i \simeq 0$ ) et des débits d'air de l'ordre de  $Q_0$ , soit  $\tilde{Q} \simeq 1$ , l'équation devient  $\bar{Q}^2 = 1$  ce qui permet effectivement de retrouver que le débit est proche du débit du silo ouvert. Le régime très peu perméable correspond aux cas  $\mathcal{N}_l \rightarrow \infty$  et/ou  $\mathcal{N}_i \rightarrow \infty$ . Dans le premier cas, l'équation revient à  $\bar{Q} = \tilde{Q}$  ce qui correspond bien à une égalité entre le débit volumique d'air en haut du silo et le débit volumique de vidange des particules. Dans le second cas, l'équation s'écrit  $\bar{Q}^2 - 2\tilde{Q}\bar{Q} + \tilde{Q}^2 = 0$  dont la solution est identique.

**Confrontation du modèle aux données expérimentales** On se limitera dans cette confrontation aux cas d'un écoulement non nul d'air, qui dans nos conditions correspond toujours aux cas pour lesquels l'écoulement d'air à l'orifice est co-courant avec le débit granulaire, soit  $\tilde{Q} > 1$  et  $\pm = +$ . Il y a deux modélisations à préciser dans l'équation 6.31, celle du débit massique de particules dans le cas d'un silo ouvert  $Q_0$  et celle de la fraction volumique moyenne de particules à l'orifice  $\phi_o$ . Suite à notre étude du cas ouvert, nous avons montré que ces données sont bien représentées par les équations 6.24 et 6.23. Néanmoins le paramètre empirique  $\xi_\phi$  de l'équation 6.24 ne peut pas être a priori déduit directement des expériences du cas ouvert. Pour le calibrer nous allons évaluer  $\phi_o$  à partir des courbes expérimentale  $Q = f(Q_{air})$ . Les figures 6.15a, respectivement 6.16a, représentent le débit massique des particules en fonction du débit d'air pour 3 tailles de particules et pour un silo rectangulaire, respectivement cylindrique. Les lignes pointillées représentent l'équation 6.31 en utilisant la valeur de  $Q_0$  obtenue expérimentalement et en ajustant le seul paramètre  $\phi_o$  par la méthode des moindres carrés.

Sur les figures 6.15b, respectivement 6.16b, nous avons représenté les valeurs obtenues  $\phi_o/\phi_b$  en fonction de  $D/d$  pour le cas du silo rectangulaire, respectivement cylindrique, pour toutes les tailles  $L$  et  $D$  utilisées. Nous pouvons observer que le milieu granulaire tend à se dilater au niveau

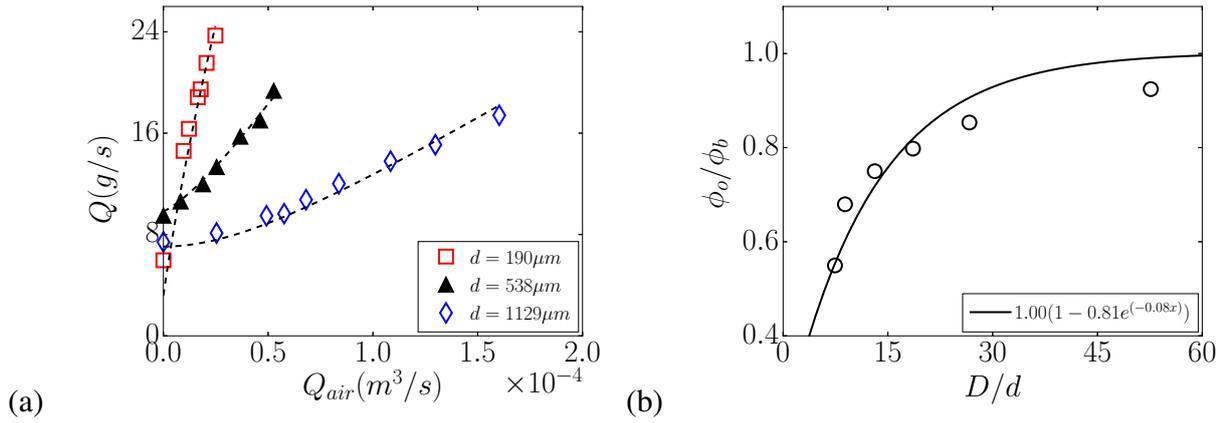


FIGURE 6.15 – Résultats pour le silo rectangulaire avec  $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$  : (a) Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour différentes tailles de particules. Les lignes pointillées représentent l'équation 6.31 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode moindres carrés. (b)  $\phi_o/\phi_b$  en fonction de  $D/d$ , la ligne solide représente équation 6.23 avec  $\xi_\phi = 1$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ .

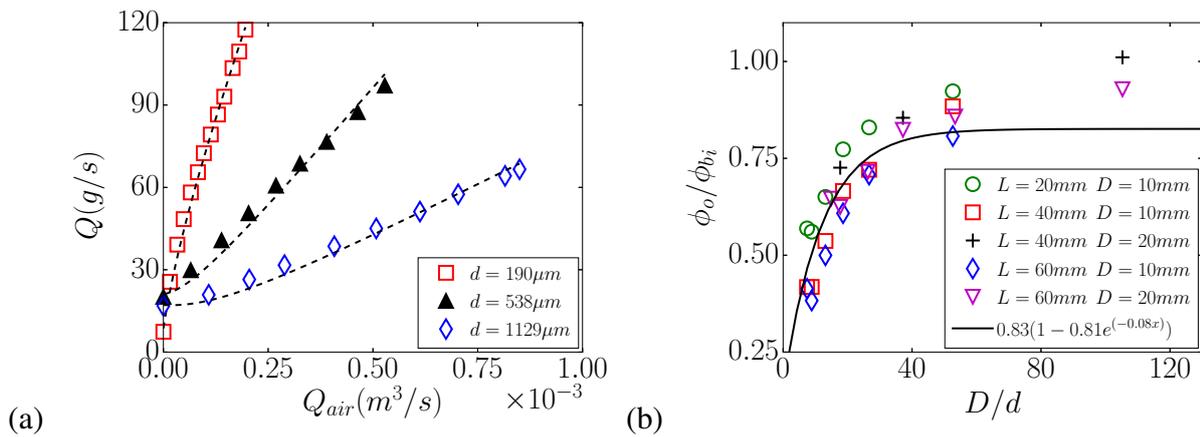


FIGURE 6.16 – Résultats pour le silo cylindrique : (a) Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  avec  $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  pour différentes tailles de particules. Les lignes pointillées représentent l'équation 6.31 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode moindres carrés, (b)  $\phi_o/\phi_b$  en fonction de  $D/d$ , avec différentes tailles de  $L$  et  $D$ , la ligne solide représente équation 6.23 avec  $\xi_\phi = 0.83$ ,  $\alpha = 0.81$ , et  $\beta = 0.08$ .

de l'orifice quand le nombre de particules dans l'ouverture diminue, comme c'est le cas pour la vidange avec le silo ouvert. La courbe en trait plein sur ces figures représente la loi proposée par Janda *et coll.* [2012] (équation 6.23) où nous avons utilisé les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  de la fonction géométrique obtenus dans l'étude de la vidange du silo ouvert et ajusté uniquement le paramètre  $\xi_\phi$  par la méthode des moindres carrés. L'ajustement dans les deux cas est relativement bon. Ceci suggère que la dilatation des particules est la même avec ou sans injection d'air et correspond à un effet géométrique qui dépend uniquement du nombre de particules dans l'ouverture. Cette observation nous conforte dans le choix de prendre en compte l'effet de l'air uniquement en corrigeant le terme de gravité dans la loi du débit de vidange du silo ouvert. Les valeurs de  $\xi_\phi$  (1 pour le silo

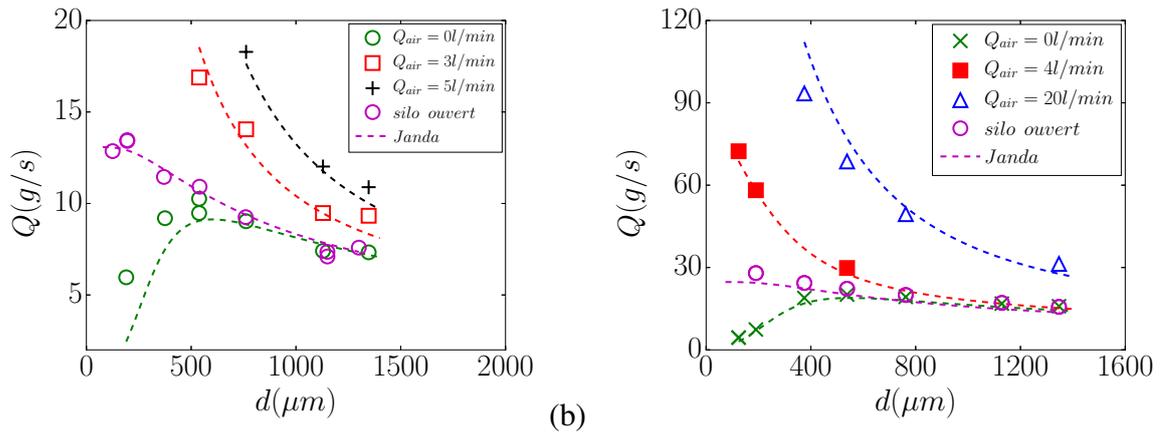


FIGURE 6.17 – Débit massique en fonction de la taille des particules  $d$  pour différents débits volumiques d'air  $Q_{\text{air}}$  pour (a) le silo rectangulaire avec  $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$ , et, (b) le silo cylindrique avec  $L = 60\text{mm}$  et  $D = 10\text{mm}$ . Les lignes pointillées représentent le modèle avec les coefficients ajustables  $C'$ ,  $\xi_\phi$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  obtenus précédemment.

rectangulaire et 0.83 pour le cylindrique) sont proches de 1 ce qui suggère que si l'ouverture est suffisamment grande le milieu n'a pas besoin de se dilater pour couler. Enfin, on peut remarquer que pour les silos cylindriques, quand  $L/D$  augmente  $\phi_o$  semble diminuer légèrement. Il est possible que cet effet soit dû au fait que, pour des rapport  $L/D$  faibles, l'écoulement est plus vertical et on peut imaginer qu'il y a moins de dilatation à la sortie liée à une réduction du passage. Cet effet étant très faible nous l'avons négligé.

On illustre différemment la qualité prédictive du modèle sur les courbes de la figure 6.17 en considérant les variations de  $Q$  à  $Q_{\text{air}}$  fixé mais  $d$  variable. L'accord est à nouveau très satisfaisant.

### 6.3 Simulation numérique continue

Les équations implémentées dans le logiciel *Basilisk*, la méthode de résolution et les conditions aux limites sont présentées dans le chapitre 3, section 3.4. Nous résolvons les équations à deux phases simplifiées décrites dans la section 6.2, en considérant que le milieu granulaire garde une fraction volumique et une perméabilité constantes et uniformes. De plus nous avons négligé le terme inertiel dans la force de traînée qui est alors modélisée par l'équation de Darcy. Enfin, l'écoulement est résolu en 2D. Nous avons réalisé une série de simulation pour des tailles de particule et des débits d'air variables. Dans cette partie, nous allons noter la densité du milieu granulaire  $\rho = \rho_p \phi$ .

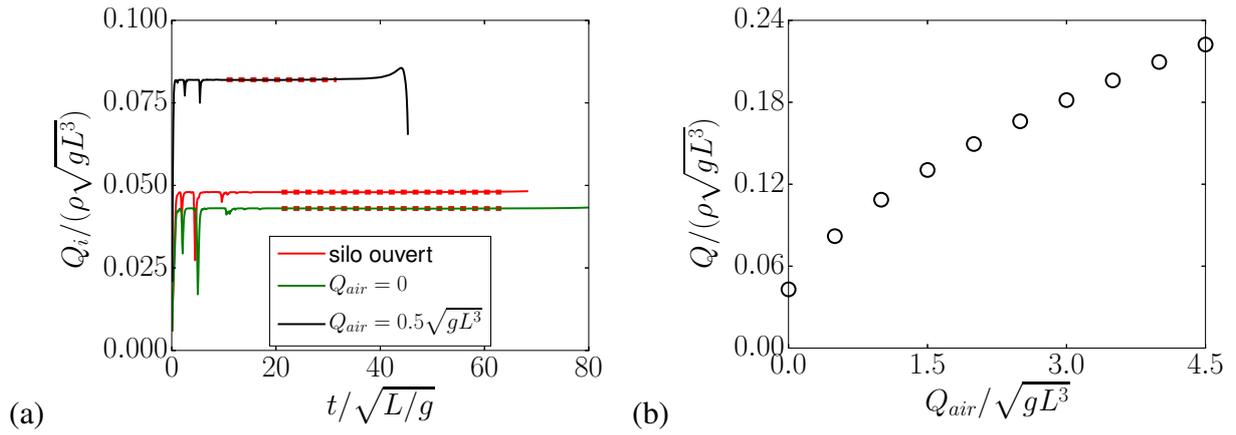


FIGURE 6.18 – Simulation numérique d’une vidange de silo avec écoulement d’air par Basilisk : (a) Le débit massique de particules instantané adimensionné par  $\rho\sqrt{gL^3}$  en fonction du temps adimensionné par  $\sqrt{L/g}$ , (b) Le débit massique de particules adimensionné par  $\rho\sqrt{gL^3}$  en fonction du débit d’air adimensionné par  $\sqrt{gL^3}$ .

### 6.3.1 Résultats numériques

La figure 6.18a montre le débit massique de particules instantané  $Q_i / \rho\sqrt{gL^3}$  en fonction du temps  $t / \sqrt{L/g}$  pour 3 cas. Comme dans l’expérience nous retrouvons un régime stationnaire. La figure 6.18b représente  $Q / \rho\sqrt{gL^3}$  en fonction de  $Q_{air} / \sqrt{gL^3}$ . Comme dans l’expérience, on observe que le débit de particule augmente fortement avec le débit d’air.

La figure 6.19 montrent la pression  $p^f / \rho g L$  en fonction du temps  $t / \sqrt{L/g}$  pour deux débits d’air et à plusieurs positions le long de l’axe vertical central du silo. Ces positions sont équivalentes à celles des mesures expérimentales et nous retrouvons bien les mêmes allures de courbes (cf figure 6.5). À une position donnée, la pression reste constante tant que le point mesuré se trouve dans le milieu granulaire, puis quand il se trouve dans la phase fluide la pression diminue linéairement en fonction du temps. Nous retrouvons également une dépression pour le cas du silo bouché, et une surpression quand  $Q_{air} > 0$ , correspondant à des écoulements d’air et de particules co-courant au niveau de l’orifice.

Enfin la figure 6.20 montre la pression moyenne  $p_m^f / \rho g L$  sur l’axe vertical central du silo en fonction de la position verticale  $z/L$  pour les mêmes débit d’air que la figure précédente. Comme dans l’expérience nous observons une rupture de pente entre la pression proche de l’orifice et loin de l’orifice, qui est due au changement de section de passage de l’écoulement.

### 6.3.2 Comparaison avec le modèle analytique simple

La solution de notre modèle dans le cas de Darcy est donnée par l’équation 6.33. La figure 6.21a montre la comparaison entre les données numériques et le modèle analytique simple correspondant à la courbe rouge. Nous pouvons voir que ce modèle surestime les résultats. Pour comprendre cet écart, nous reconsidérons les hypothèses faites pour développer le modèle.

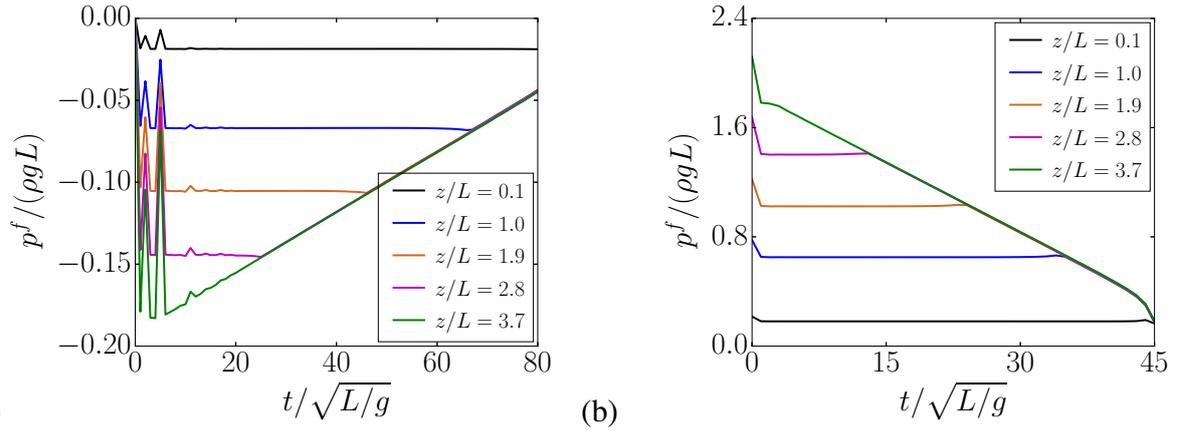


FIGURE 6.19 – Pression  $p^f / \rho g L$  sur l'axe de symétrie vertical du silo en fonction du temps  $t / \sqrt{L/g}$  pour différentes position et deux débits d'air (a)  $Q_{air} / \sqrt{g L^3} = 0$  et (b)  $Q_{air} / \sqrt{g L^3} = 0.5$ .

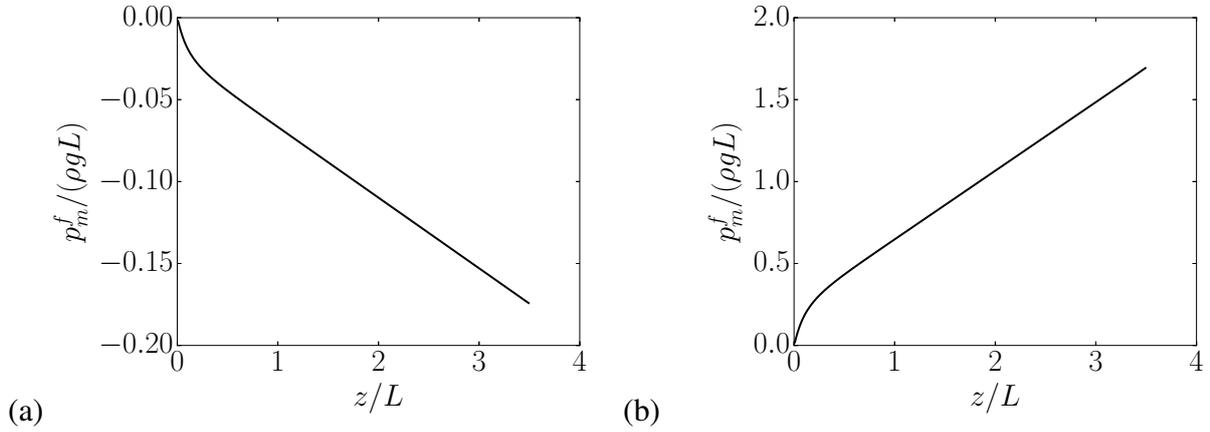


FIGURE 6.20 – Pression  $p_m^f / \rho g L$  sur l'axe vertical central du silo en fonction de la position verticale  $z/L$  pour différentes positions et (a)  $Q_{air} / \sqrt{g L^3} = 0$  et (b)  $Q_{air} / \sqrt{g L^3} = 0.5$ .

(i) Nous avons modélisé l'effet de l'écoulement du gaz sur le débit de vidange en considérant que la loi de vidange obtenue dans le cas d'un silo ouvert reste valable et que l'écoulement du fluide génère simplement une force en volume sur les particules qu'il faut rajouter à la gravité. Nous avons choisi d'utiliser le gradient de pression moyen sur l'orifice pour modéliser cette force volumique :

$$Q = Q_0 \left( 1 + \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_{z=0} \right)^{1/2} \quad (6.34)$$

(ii) Nous avons évalué le gradient de pression moyen à l'orifice en moyennant l'équation de conservation de la quantité du mouvement vertical du fluide puis nous l'avons simplifiée en utilisant plusieurs hypothèses. Dans le régime visqueux décrit par la loi de Darcy, l'équation 6.18 s'écrit :

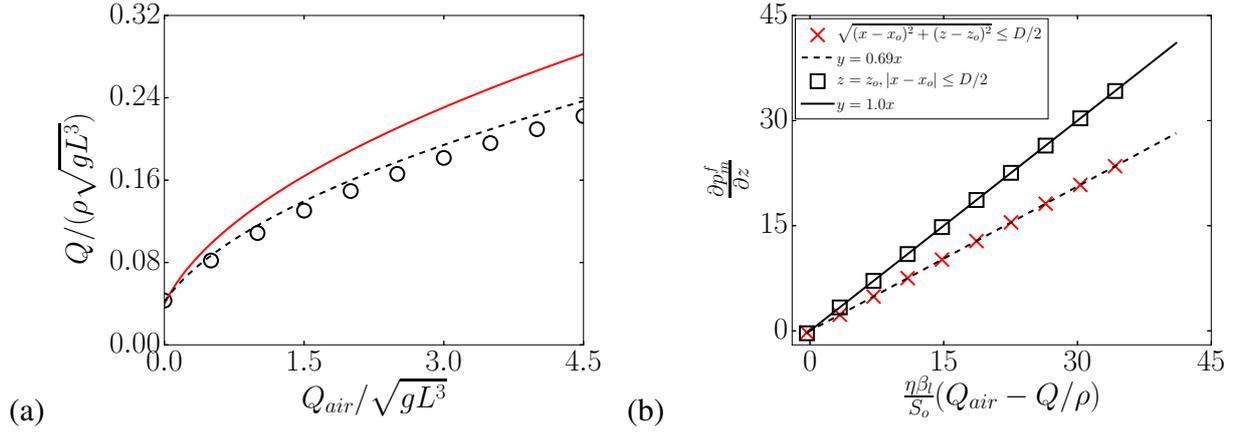


FIGURE 6.21 – (a) Mêmes données que la figure 6.18b. Les courbes représentent le modèle analytique simple (équation 6.33) avec  $A=1$  (courbe rouge) et  $A=0.67$  (courbe pointillée noire). (b) Gradient de pression  $\frac{\partial p^f}{\partial z}$  en fonction de  $\frac{\eta\beta_l}{S_o}(Q_{air} - Q/\rho)$ , ( $\square$ ) moyenné sur l’orifice et ( $\times$ ) moyenné dans la zone au dessus de l’orifice  $\sqrt{(x - x_o)^2 + (z - z_o)^2} \leq D/2$ . La courbe en trait plein représente l’équation  $y = x$  et la courbe pointillée représente l’équation  $y = 0.69x$  ajustée par la méthode des moindres carrés.

$$\frac{\partial p^f}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\eta\beta_l (U_z|_{z=0} - u_z^p|_{z=0}) = \eta\beta_l \left( \frac{Q_{air}}{S_o} - \frac{Q}{\rho S_o} \right)$$

Dans le cas simulé (loi de Darcy et porosité constante), cette relation est rigoureusement exacte comme on peut le voir sur la figure 6.21b où le gradient de pression moyen à la sortie ( $\square$ ) est représenté en fonction de  $\eta\beta_l (Q_{air}/S_o - Q/\rho S_o)$  et est très bien ajusté par la droite  $y = x$  (trait plein).

Le modèle analytique donnant une bonne évolution du débit et une bonne valeur du débit pour un débit d’air faible, ceci suggère que la modélisation proposée pour la force volumique exercée par le fluide et agissant comme terme moteur supplémentaire est surestimée. Cette dernière est déduite du gradient de pression moyenné sur l’ouverture, or a priori, cette force volumique s’exerce sur une zone autour de l’orifice au sein de laquelle elle n’est pas uniforme. Sur la figure 6.21b nous avons représenté le gradient de pression moyenné dans la zone au dessus de l’orifice  $\sqrt{(x - x_o)^2 + (z - z_o)^2} \leq D/2$  ( $\times$ ) où  $(x_o, z_o)$  correspond aux coordonnées du point au centre de l’orifice. On peut voir que ce gradient de pression, que nous noterons  $\frac{\partial p^f}{\partial z}\Big|_n$  reste proportionnel à  $\eta\beta_l (Q_{air}/S_o - Q/\rho S_o)$  mais est plus faible d’un facteur 0.69. On retient donc que

$$\frac{\partial p^f}{\partial z}\Big|_n = A\eta\beta_l \frac{Q_{air} - Q/\rho}{S_o} \quad (6.35)$$

avec  $A = 0.69$ . L’application de cette correction dans notre modèle modifie le terme  $\mathcal{N}_l$  par  $A\mathcal{N}_l$  dans l’équation 6.33. La solution correspondante est représentée par les traits pointillés sur la figure 6.21 et ajuste relativement bien les données de la simulation.

Cette analyse quantitative des résultats de la simulation numérique semble valider l'approche analytique : l'écoulement d'air génère simplement une force en volume sur les particules qu'il faut rajouter à la gravité. Le débit des particules étant contrôlé par l'écoulement proche de la sortie, il faut évaluer cette force de traînée sur la zone de l'orifice. Dans l'expérience, nous n'utilisons pas exactement le gradient de pression moyenné sur l'orifice mais une estimation donnée par l'équation 6.18. De plus nous avons calibré le paramètre  $\xi_\phi$  à partir de nos données. Ce faisant il est possible que nous ayons introduit artificiellement le paramètre  $A$  et que la valeur estimée de  $\phi_o$  ne représente pas de manière quantitative la valeur de la fraction volumique moyenne au niveau de l'orifice.

## 6.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre nous avons étudié la vidange d'un silo assistée par une injection d'air lorsque l'orifice est placé en bas. Nous avons montré que le débit des particules dépend fortement du débit d'air imposé. Grâce à des mesures de pression, nous avons montré que l'écoulement de l'air était bien décrit par les modèles d'Ergun et de Kozeny-Carman et que le milieu granulaire se dilate à l'orifice de façon similaire au cas d'un silo ouvert. Nous avons alors modélisé analytiquement l'effet de l'écoulement du gaz sur le débit de vidange en considérant que la loi de vidange obtenue dans le cas d'un silo ouvert reste valable et que l'écoulement du fluide génère simplement une force en volume sur les particules qu'il faut rajouter à la gravité. La simulation numérique continue nous a conforté dans la validité de ce modèle. Néanmoins cette simulation est faite dans le régime de Darcy et en supposant la fraction volumique du milieu granulaire constante. Il serait intéressant d'élargir cette étude au régime inertiel et de faire varier  $\phi$  et donc la perméabilité du milieu à l'ouverture.

Dans le chapitre suivant nous nous intéressons à l'effet de l'injection d'air sur le débit de particules quand l'ouverture est placée sur le côté.



# Chapitre 7

## Effet d'un écoulement de gaz sur la vidange d'un silo avec orifice latéral

Dans ce chapitre, nous nous intéressons finalement au cas le plus similaire à notre configuration d'intérêt, c'est à dire à l'effet d'un écoulement de gaz sur la vidange d'un silo élancé possédant un orifice latéral. C'est une configuration qui combine les deux effets que nous avons étudiés précédemment : celui de la position de l'orifice et celui de l'écoulement d'air. Nous allons suivre la même démarche que dans le chapitre précédent : nous présenterons d'abord les résultats acquis grâce au système expérimental présenté au chapitre 3, pour le débit de vidange puis pour l'écoulement d'air. Ensuite nous comparerons ces résultats au modèle analytique que nous avons développé dans le chapitre 6 et que nous adapterons à cette configuration. Enfin nous confronterons ce modèle aux résultats de la simulation numérique continue.

### 7.1 Débit de vidange des particules

Sur les figures 7.1, nous pouvons voir que nous retrouvons globalement pour un silo cylindrique avec orifice latéral le même comportement pour le débit que dans le cas d'un orifice inférieur : le débit est stationnaire, il dépend fortement de la taille des particules  $d$  et du débit d'air imposé  $Q_{air}$ . Par contre, dans nos conditions d'études, il ne dépend pas de la taille du silo  $L$ .

Ces observations sont résumées sur la figure 7.2 où l'on a représenté le débit de particule  $Q$  en fonction de la taille des particules  $d$  pour plusieurs débits d'air  $Q_{air}$  dans les deux géométries (a) cylindrique et (b) rectangulaire. Nous pouvons voir notamment que  $Q$  croît avec  $Q_{air}$  et décroît avec  $d$  sauf dans le cas d'un contre courant d'air ( $Q_{air} = 0$ ). La ligne pointillée représente l'équation 5.1 avec les paramètres obtenus au chapitre 5 dans le cas d'un silo ouvert.

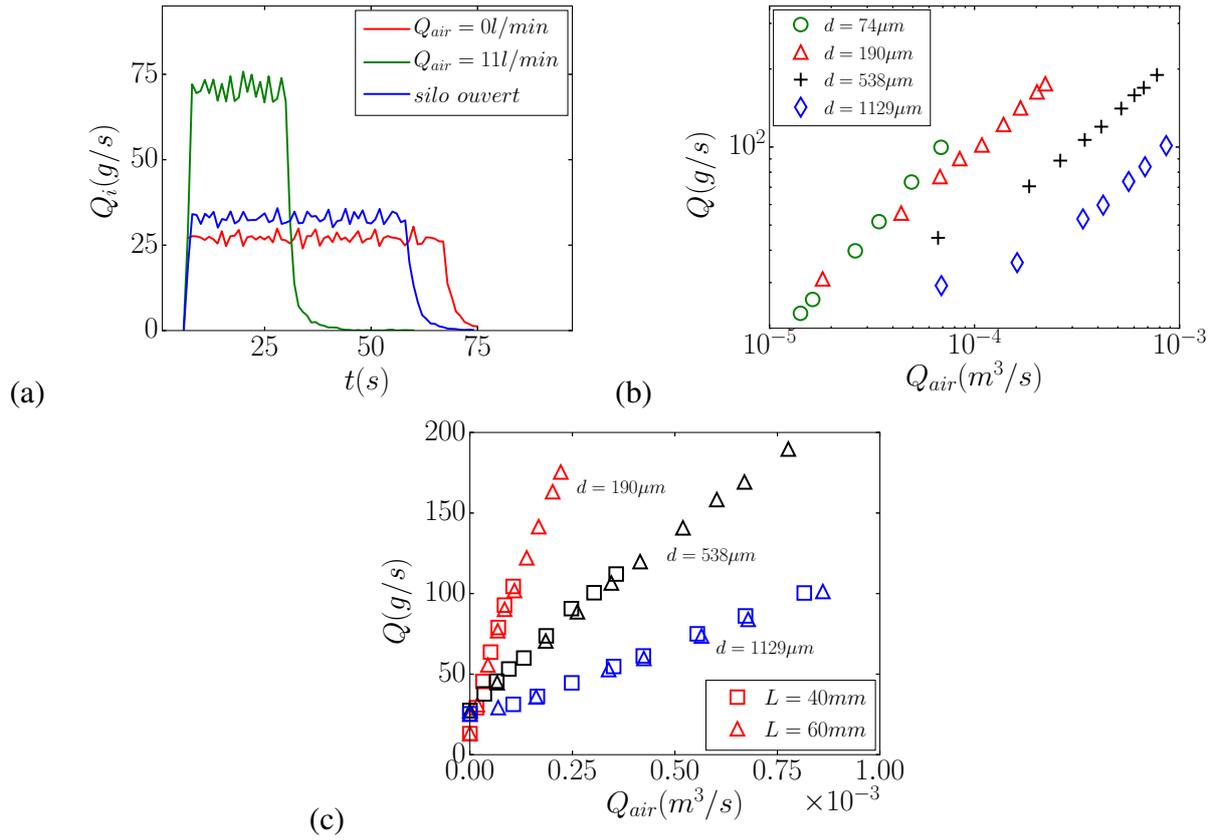


FIGURE 7.1 – Silo cylindrique : (a) Évolution temporelle du débit massique instantané pour différents débits d'air  $Q_{air}$  et pour  $d = 538\mu m$ ,  $L = 60mm$ ,  $D = 20mm$  et  $W = 10mm$ . (b,c) Débit de particules,  $Q$ , en fonction de  $Q_{air}$  (b) pour  $L = 60mm$  et différentes tailles de particules  $d$  et (c) pour différentes tailles de silo  $L$  (symboles différents) et différents  $d$  (couleurs différentes).

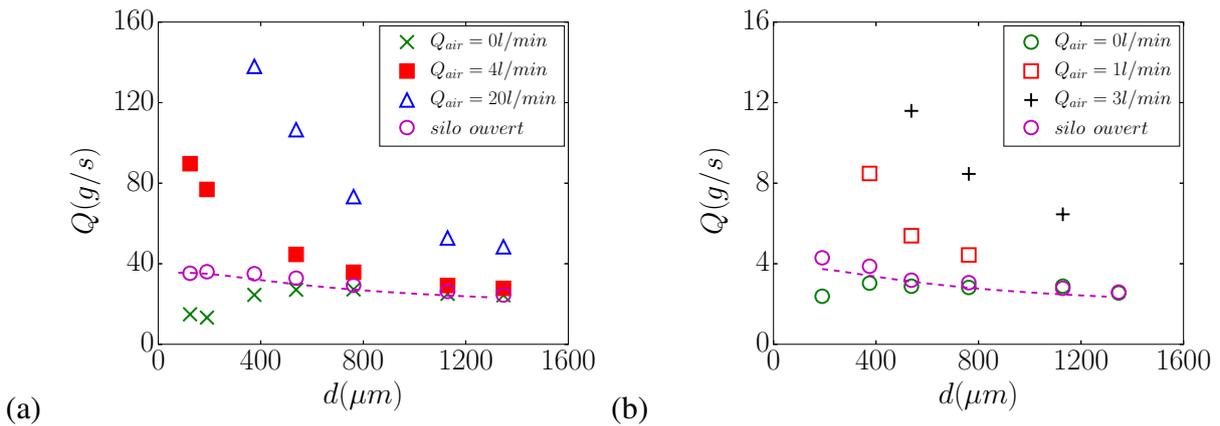


FIGURE 7.2 – Débit massique en fonction de la taille des particules  $d$  pour différents débits volumiques d'air  $Q_{air}$  ainsi que pour le silo ouvert ( $\circ$ ) (a) pour le silo cylindrique ( $L = 60mm$ ,  $D = 20mm$  et  $W = 10mm$ ) et (b) pour le silo rectangulaire ( $L = 60mm$ ,  $D = 10mm$  et  $W = 3.5mm$ ). La ligne pointillée représente l'équation 5.1 avec les paramètres obtenus au chapitre 5.

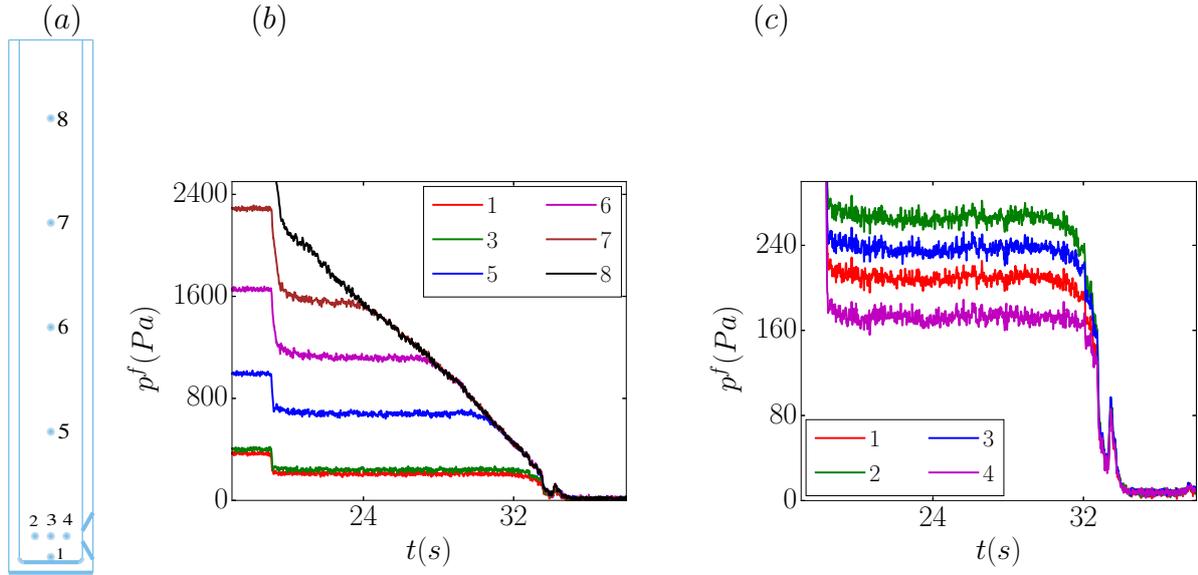


FIGURE 7.3 – Silo rectangulaire ( $D = 10\text{mm}$ ,  $W = 3.5\text{mm}$ ) avec  $d = 1129\mu\text{m}$  et  $Q_{air} = 4\text{l/min}$  : (a) position et numérotation des capteurs de pression. (b,c) Evolution temporelle de la pression (b) le long de l’axe vertical central et (c) près de l’orifice.

## 7.2 Écoulement d’air

Dans le cas du silo rectangulaire, nous disposons de prises de pression, disposées horizontalement dans l’axe de l’orifice et verticalement dans l’axe central du silo, comme on peut le voir sur la figure 7.3a où la numérotation utilisée est indiquée (l’emplacement précis est montré au chapitre 3). L’évolution temporelle de la pression, pour un cas typique ( $D = 10\text{mm}$ ,  $d = 1129\mu\text{m}$  et  $Q_{air} = 4\text{l/min}$ ) est montrée sur la figure 7.3b pour les prises de pression sur l’axe central vertical du silo, et sur la figure 7.3c pour les prises de pression proche de l’orifice. L’évolution des pressions sur l’axe central sont similaires à celles obtenues pour l’orifice inférieur : à chaque position, on observe un plateau suivi d’une décroissance linéaire lorsque le capteur se retrouve hors de la colonne granulaire. Nous pouvons également voir sur ces figures que des gradients de pression se développent dans les deux directions, verticalement et horizontalement. Pour les mettre en évidence nous avons représenté la pression moyenne du plateau en fonction de la position sur les figures 7.4, en notant  $(x_0, z_0)$  la position au centre de l’orifice.

Sur la figure 7.4a, nous retrouvons comme dans le cas de l’orifice inférieur, qu’un gradient de pression vertical constant se développe loin de l’orifice, correspondant à un écoulement parallèle et uniforme. Toutefois, dans cette configuration où l’orifice est vertical, les débits sont uniquement liés aux vitesses horizontales à l’orifice, soit si l’on effectue une moyenne sur la surface de l’orifice :

$$U_x|_{x=x_o} = -Q_{total}/S_o = -Q_{air}/S_o \quad (7.1)$$

$$u_x^p|_{x=x_o} = -Q/(\bar{\phi}_o \rho_p S_o) \quad (7.2)$$

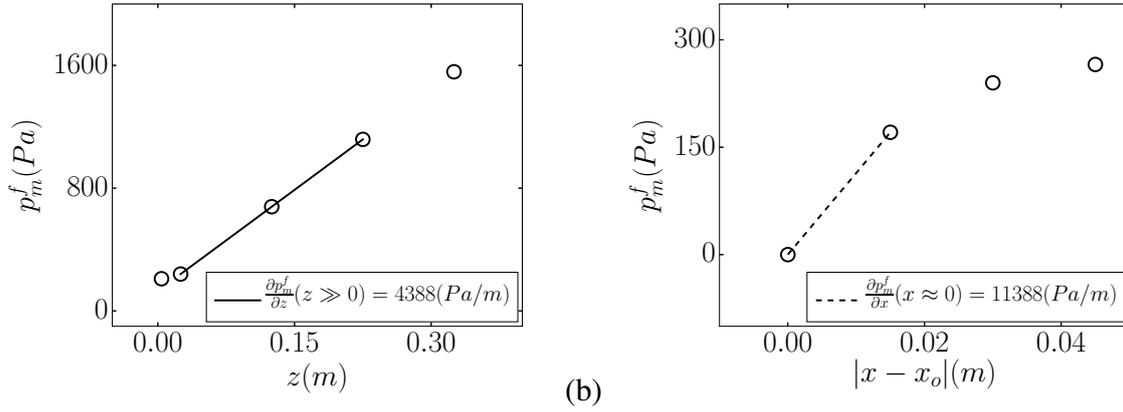


FIGURE 7.4 – Silo rectangulaire ( $D = 10\text{mm}$ ,  $W = 3.5\text{mm}$ ) avec  $d = 1129\mu\text{m}$  et  $Q_{air} = 4\text{l/min}$  : Pression moyenne du plateau  $p_m^f$  (a) le long de l’axe vertical central en fonction de  $z$  et (b) le long de l’axe horizontal face au centre de l’orifice en fonction de  $|x - x_0|$ .

C’est donc la force de traînée horizontale qui va jouer principalement un rôle dans cette géométrie. Or celle ci, d’après la conservation de la quantité de mouvement de la phase fluide (équation 6.7 du chapitre 6), est équivalente au gradient de pression horizontal. Sur la figure 7.4b nous avons tracé le gradient de pression horizontal, face au centre de l’orifice. Nous pouvons voir que celui ci varie rapidement proche de l’orifice, puis plus lentement loin de l’orifice. Comme précédemment, nous allons estimer le gradient de pression horizontal à l’orifice en utilisant le capteur le plus proche de l’orifice, à savoir le capteur 4 qui se situe à la même élévation que le centre de l’orifice et à une distance  $x_4 - x_0 = 1.5\text{cm}$  de l’orifice :

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial x}(x \approx x_o) \approx \frac{p_m^f(x_4)}{x_4 - x_o} \quad (7.3)$$

De la même façon que dans le cas du silo inférieur, cette mesure peut nous servir à estimer la fraction volumique à la sortie du silo. En effet, avec les mêmes hypothèses que celles posées pour établir l’équation 6.18, nous pouvons estimer la force de traînée et écrire :

$$\frac{\partial p_m^f}{\partial x}(x \approx x_o) \approx \eta \beta_l(\phi_o) \frac{Q_{air} - Q/(\phi_{bi}\rho_p)}{S_o} + \rho_f d \beta_i(\phi_o) \left( \frac{Q_{air} - Q/(\phi_{bi}\rho_p)}{S_o} \right)^2 \quad (7.4)$$

avec  $\beta_l(\phi_o) = \frac{150\phi_o^2}{(1 - \phi_o)^3 d^2}$  et  $\beta_i(\phi_o) = \frac{1.75\phi_o}{(1 - \phi_o)^3 d^2}$ . En ajustant les courbes du gradient de pression horizontal à la sortie en fonction de  $[Q_{air} - Q/(\phi_{bi}\rho_p)]/S_o$  par l’équation 7.4 on peut alors en déduire une estimation de la fraction volumique à la sortie  $\phi_o$ . C’est ce qui est présenté dans la figure 7.5 pour le silo rectangulaire ( $L = 60$ ,  $W = 3.5\text{mm}$ ,  $D = 20\text{mm}$ ) (a) quand les particules sont immobiles grâce à un coton qui bouche l’orifice, et (c) lors de la vidange. Les valeurs estimées de  $\phi_o/\phi_{bi}$  dans ces deux cas et pour les deux tailles d’orifice disponibles sont tracées respectivement dans les figures 7.5b et 7.5d en fonction de  $W/d$ , car pour ces silos

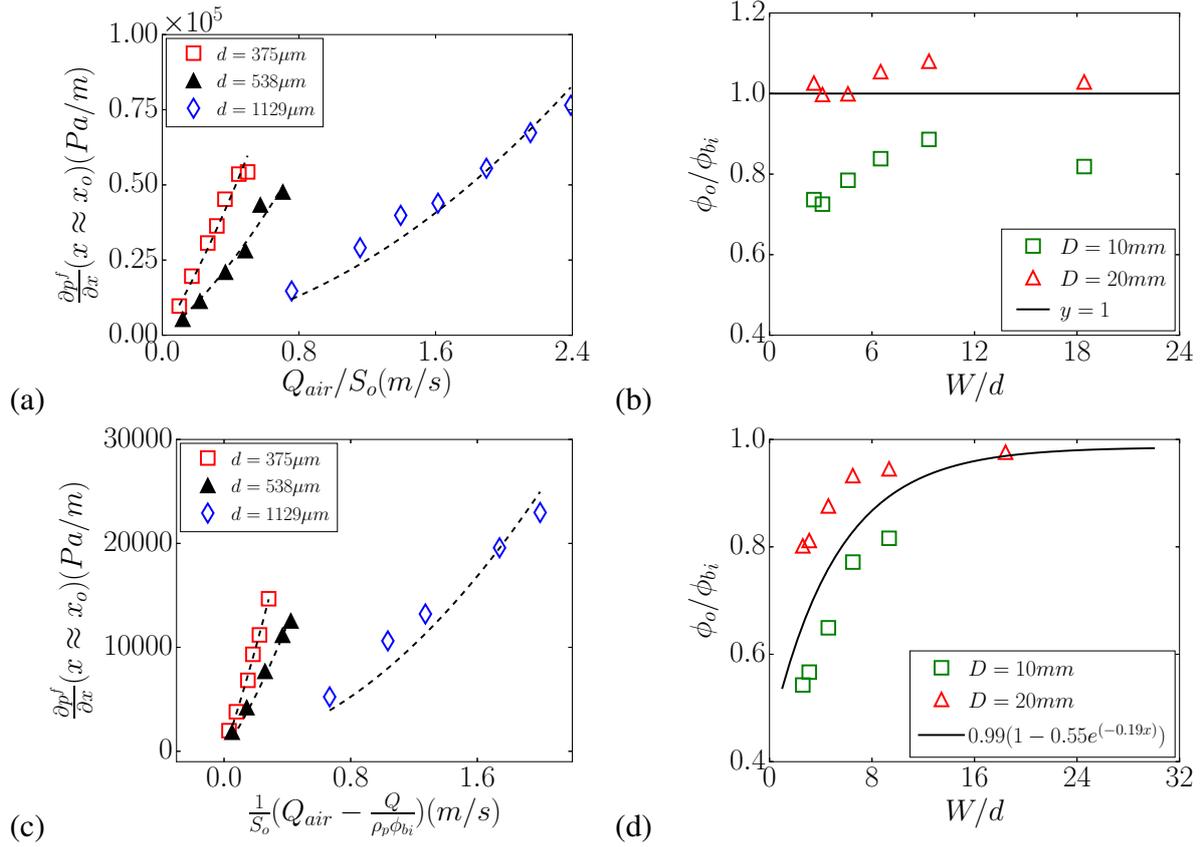


FIGURE 7.5 – Résultats du silo rectangulaire ( $L = 60$ ,  $W = 3.5mm$ ) : (a,b) dans un cas où les particules sont immobiles et (c,d) pour la vidange du silo. (a,c) Gradient de pression proche de la sortie  $\frac{\partial p^f}{\partial x}(x \approx x_o)$  mesuré en de  $\frac{1}{S_o}(Q_{air} - \frac{Q}{\rho_p\phi_{bi}})$  pour  $D = 20mm$  et trois tailles de particules. Les lignes pointillées représentent l'équation 7.4 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode moindres carrés. (b,d)  $\phi_o/\phi_{bi}$  en fonction de  $W/d$ . La courbe en trait plein représente (b)  $y = 1$  et (d) l'équation 7.5 avec les paramètres ajustables  $\xi_\phi = 0.99$ ,  $\alpha = 0.55$ , et  $\beta = 0.19$  obtenus par la méthode des moindres carrés.

étanches, on se trouve dans le régime contrôlé par la friction latérale (voir le chapitre 5, section 5.2.1).

Dans le cas où les particules sont immobiles (figure 7.5b), on retrouve  $\phi_o \approx \phi_b$  pour l'orifice le plus grand  $D = 20mm$ , correspondant à une fraction volumique homogène au sein du silo. L'accord est moins bon pour  $D = 10mm$ , cependant l'estimation du gradient de pression se fait uniquement avec la prise de pression 4 qui dans ce cas se trouve à une distance de l'orifice  $x_4 - x_0 = 15mm > D$ . Il est alors probable que le gradient de pression à la sortie soit largement sous-estimé.

Dès lors qu'il y a un écoulement (figure 7.5d) nous retrouvons une dilatation à la sortie qui peut être ajustée par l'équation :

$$\phi_o/\phi_{bi} = \xi_\phi G_W(W/d) = \xi_\phi [1 - \alpha_W e^{-\beta W/d}]. \quad (7.5)$$

Les coefficients obtenus  $\alpha = 0.55$ , et  $\beta = 0.19$  sont du même ordre de grandeur que ceux obtenus dans le cas du silo ouvert (tableau 5.1 du chapitre 5). Comme dans les configurations précédentes, les mesures de pression semblent donc indiquer que le milieu se dilate à la sortie. Dans la suite de ce chapitre nous allons adapter le modèle développé au chapitre 6 à notre configuration et le comparer aux résultats expérimentaux.

## 7.3 Modèle

### 7.3.1 Modèles asymptotiques

Les modèles asymptotiques décrits dans le chapitre précédent (cf. partie 6.2.3) restent valables quand l'orifice est latéral. Dans le cas où le lit de particules est très peu perméable, l'air ne pénètre pas dans le milieu granulaire et ce régime peut être décrit par  $Q = \rho_p \phi_b Q_{air}$ . Au contraire, dans le cas où le lit de particules est très perméable, l'air passe aisément à travers le milieu granulaire sans le perturber et le débit de particules est le même que dans le cas ouvert  $Q \approx Q_0$ . Ces deux régimes sont représentés sur la figure 7.6, où l'on a tracé le débit massique des particules en fonction du débit volumique de l'air pour 4 diamètres de particules dans le cas du silo cylindrique ( $L = 60mm$ ,  $D = 20mm$  et  $W = 10mm$ ). On peut constater que les deux lois asymptotiques encadrent bien les données.

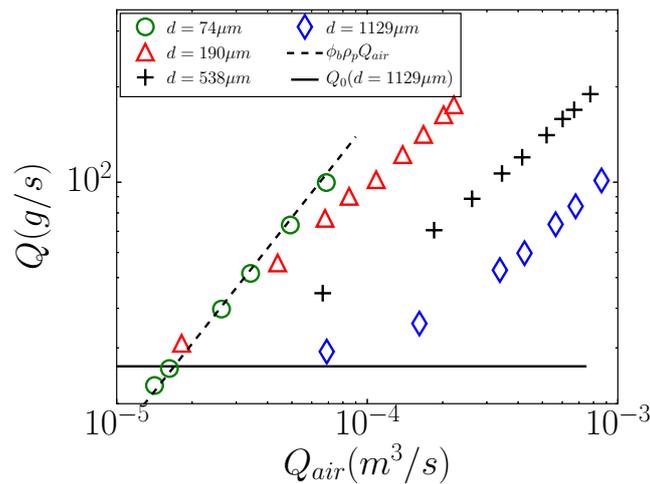


FIGURE 7.6 – Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air pour le silo cylindrique ( $L = 60mm$ ,  $D = 20mm$  et  $W = 10mm$ ) pour différentes tailles de particules. La ligne pointillée représente l'équation  $\rho_p \phi_b Q_{air}$ , la ligne solide représente le débit du silo ouvert pour  $d = 1129\mu m$ .

### 7.3.2 Relation entre le débit de particules et le gradient de pression fluide à l'orifice

Dans le cas d'un orifice inférieur, afin de modéliser l'effet d'un écoulement de gaz sur la vidange de silo, nous avons simplement supposé que la relation donnant le débit dans le cas d'un silo ouvert restait valable, si l'on ajoutait le gradient de pression vertical sur l'orifice  $\frac{1}{\phi_o \rho_p} \frac{\partial p^f}{\partial z} \Big|_{z=0}$  comme terme moteur en plus de la gravité.

Dans le cas de l'orifice latéral, cette approche semble délicate à utiliser aussi simplement car la gravité et le gradient de pression horizontal sont alors orthogonaux. Toutefois, nous avons montré au chapitre 5 dans l'étude de l'effet de la position de l'orifice dans le cas d'un silo ouvert, que même si les phénomènes physiques conduisant à la loi de vidange ne sont pas encore élucidés, celle si pouvait être modélisée par la loi :

$$Q_{0lat} = C'_{lat} \rho_p \phi_b G_D \left( \frac{D}{d} \right) G_W \left( \frac{W}{d} \right) F \left( \frac{D}{W} \right) W \sqrt{gD^3}, \quad (7.6)$$

avec les fonction géométriques  $G_D(D/d) = [1 - \alpha_D e^{-\beta \frac{D}{d}}]$ ,  $G_W(W/d) = [1 - \alpha_W e^{-\beta \frac{W}{d}}]$  et  $F(D/W) = \sqrt{1/[1 + \gamma_2 D/W]}$ . Alors que pour une vidange simple, avec un orifice inférieur pour le silo rectangulaire, nous avons montré au chapitre 4 que la loi de vidange pouvait être modélisée par la loi :

$$Q_{0inf} = C'_{inf} \phi_b \rho_p G \left( \frac{D}{d} \right) W \sqrt{gD^3}, \quad (7.7)$$

Pour un orifice latéral, même si la gravité est orthogonale à la sortie, elle reste le moteur global de la vidange, donc nous pouvons supposer que l'effet de la position de l'orifice peut être englobée dans un coefficient  $\kappa$  tel que le terme moteur soit  $\kappa g$ . Pour calculer ce coefficient  $\kappa$ , nous supposons qu'il est lié uniquement à la position de l'orifice, et non à la friction sur les parois ou à la taille des particules. Nous nous plaçons alors dans le cas  $W \gg D$  (soit  $F(W/D) = 1$ ) et  $d \ll D$  (toutes les fonction de dilatation  $G$  sont égales à 1) et dans ces conditions nous obtenons :

$$\kappa = \left( \frac{C'_{lat}}{C'_{inf}} \right)^2, \quad (7.8)$$

Dans le cas du silo rectangulaire, avec les coefficients obtenus aux chapitre 4 et 5, on obtient alors  $\kappa = 0.21$ . Pour le silo cylindrique ( $L = 40mm$ ), afin d'isoler uniquement le rôle de la position de l'orifice, nous avons réalisé une série d'expériences avec un orifice latéral rond pour 2 tailles de trou,  $D = 10mm$  et  $D = 20mm$ . Les données sont alors bien ajustées par la loi  $Q_{0lat} = C'_{lat} \rho_p \phi_b G_D \left( \frac{D}{d} \right) W \sqrt{gD^3}$ , et nous pouvons évaluer  $\kappa = 0.27$ .

En présence du gaz, nous supposons alors que le gradient de pression se rajoute au terme moteur,

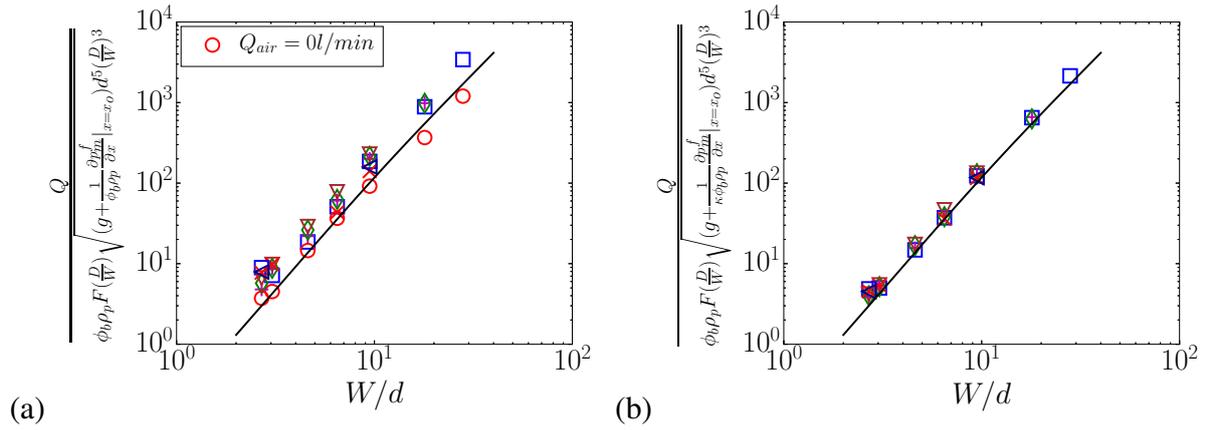


FIGURE 7.7 – Silo rectangulaire ( $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 20\text{mm}$ ) : Débit massique de particules adimensionné en fonction de  $W/d$ . La ligne noire représente l'équation 7.10 avec  $C'_{lat} = 0.41$ ,  $\alpha = 0.64$ , et  $\beta = 0.19$  et en imposant (a)  $\kappa = 1$  et (b)  $\kappa = 0.21$ .

de sorte que l'on puisse écrire :

$$Q_{lat} = C'_{inf} \rho_p \phi_b G_D \left( \frac{D}{d} \right) G_W \left( \frac{W}{d} \right) F \left( \frac{D}{W} \right) W D^{3/2} \left( \kappa g + \frac{1}{\phi_o \rho_p} \frac{\partial p^f}{\partial x} \Big|_{x=x_o} \right)^{1/2}, \quad (7.9)$$

Nous pouvons effectuer un premier test sur la validité de l'équation 7.9 en utilisant la mesure expérimentale du gradient de pression. En supposant comme dans le chapitre 5 que dans la géométrie des silos utilisés  $G_D(D/d) \approx 1$  et qu'en facteur du terme de pression la variation de la fraction volumique joue un rôle faible soit  $\phi_o \approx \phi_b$ , l'équation 7.9 devient :

$$\frac{Q_{lat}}{\phi_b \rho_p F \left( \frac{D}{W} \right) \sqrt{\left( g + \frac{1}{\kappa \phi_b \rho_p} \frac{\partial p^f}{\partial x} \Big|_{x=x_o} \right) d^5 \left( \frac{D}{W} \right)^3}} = C'_{lat} G_W \left( \frac{W}{d} \right) \left( \frac{W}{d} \right)^{5/2} \quad (7.10)$$

Sur la figure 7.7a, nous avons tracé le terme de gauche de l'équation 7.10 en fonction de  $W/d$  en supposant  $\kappa = 1$  pour toutes les expériences réalisées avec injection d'air dans le silo rectangulaire avec  $L = 60\text{mm}$  et  $D = 20\text{mm}$ . Nous pouvons voir que les données sont légèrement dispersées. La loi en trait plein représente l'équation 7.10 avec les paramètres obtenus au chapitre 5. Si maintenant on prend en compte le facteur  $\kappa = 0.21$  comme sur la figure 7.7b, nous pouvons voir que les données sont beaucoup mieux rassemblées et mieux ajustées par la loi obtenue dans le cas d'un silo ouvert. Notons que dans les cas  $Q_{air} = 0$  où l'écoulement est à contre-courant, le terme  $\left( g + \frac{1}{\kappa \phi_b \rho_p} \frac{\partial p^f}{\partial x} \Big|_{x=x_o} \right)$  devient négatif et les données n'ont pas été représentées. Néanmoins les résultats nous confortent dans l'importance d'introduire ce paramètre  $\kappa$  même si il est mis en défaut pour les dépressions.

### 7.3.3 Modèle analytique simple

L'équation 7.9 peut simplement se réécrire sous la forme

$$Q_{lat} = Q_{0lat} \left( 1 + \frac{1}{\kappa g \phi_o \rho_p} \frac{\partial p^f}{\partial x} \Big|_{x=x_o} \right)^{1/2}, \quad (7.11)$$

où  $Q_{0lat}$  correspond au débit dans le cas d'un silo ouvert. Le modèle analytique établi au chapitre 6 peut alors simplement être utilisé en remplaçant  $g$  par  $\kappa g$ . Soit dans le cas d'un écoulement d'air à co-courant ( $Q < \phi_o \rho_p Q_{air}$ ) et en utilisant les variables sans dimensions introduites en section 6.2.4.b.) :

$$\bar{Q} = \frac{Q}{Q_0} = \frac{\left( -2\mathcal{N}_i \tilde{Q} - \mathcal{N}_l \right) + \sqrt{\Delta}}{2(1 - \mathcal{N}_i)} \quad (7.12)$$

avec

$$\Delta = \mathcal{N}_l^2 + 4 \left( 1 + \mathcal{N}_i \tilde{Q} \right) + 4\mathcal{N}_i \left( \tilde{Q}^2 - 1 \right) \quad (7.13)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_l &= \frac{\eta \beta_l(\phi_o) Q_0}{\phi_o^2 \rho_p^2 \kappa g S_o} \\ \mathcal{N}_i &= \frac{\rho_f d \beta_i(\phi_o) Q_0^2}{\phi_o^3 \rho_p^3 \kappa g S_o^2} \\ \tilde{Q} &= \frac{Q_{air} \phi_o \rho_p}{Q_0} \end{aligned}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous utilisons le débit expérimental obtenu dans le cas de la vidange du silo ouvert  $Q_{0lat}$  afin de calibrer le paramètre  $\xi_\phi$  dans la loi de dilatation à la sortie :

$$\phi_o = \xi_\phi \phi_b G_W(W/d) = \xi_\phi \phi_b (1 - \alpha_W e^{-\beta \frac{W}{d}}) \quad (7.14)$$

où les paramètres  $\beta$  et  $\alpha_W$  sont ceux obtenus pour le cas du silo ouvert (tableau 5.1 du chapitre 5). Ainsi nous extrayons  $\phi_o$  des courbes expérimentales  $Q = f(Q_{air})$  par la méthode des moindres carrés en ajustant les données par l'équation 7.12, comme on peut le voir sur la figure 7.8a (respectivement 7.9a) pour le silo rectangulaire (respectivement cylindrique). Sur les figure 7.8b et 7.9b on peut voir dans les deux configurations que les valeurs obtenues  $\phi_o/\phi_b$  sont relativement bien ajustées par l'équation 7.14 avec  $\xi_\phi = 1$  pour le silo rectangulaire et  $\xi_\phi = 0.96$  pour le silo cylindrique.

Le bon accord de l'ajustement suggère à nouveau que la dilatation des particules est la même avec ou sans injection d'air et correspond à un effet géométrique qui dépend uniquement du nombre de particules dans l'ouverture et non du débit des particules. Les valeurs de  $\xi_\phi \approx 1$  suggèrent que si l'ouverture est suffisamment grande le milieu n'a pas besoin de se dilater pour couler. Ces observations nous confortent dans le choix de prendre en compte l'effet de l'air uni-

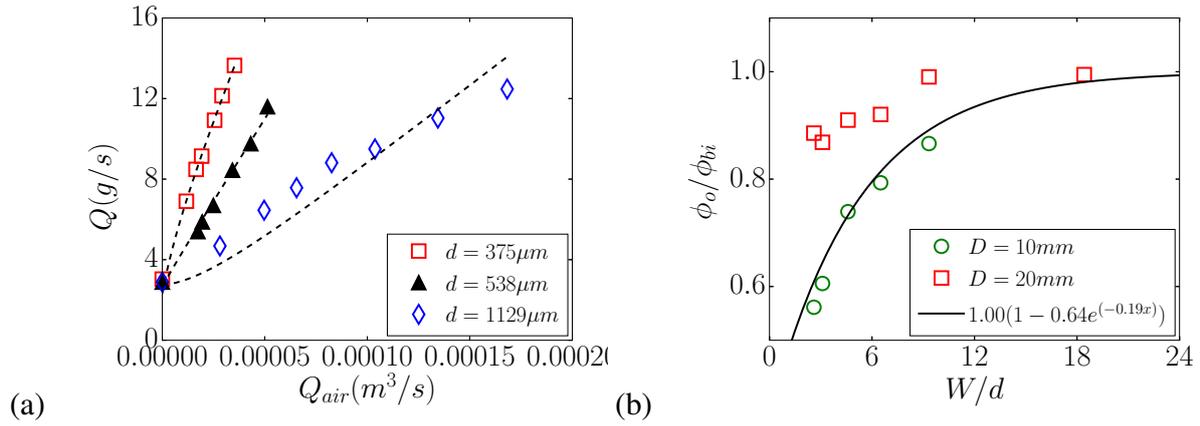


FIGURE 7.8 – Silo rectangulaire ( $L = 60mm$ ,  $W = 3.5mm$ ) : (a) Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour  $D = 20mm$  et 3 tailles de particules. Les lignes pointillées représentent l'équation 7.12 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode des moindres carrés. (b)  $\phi_o/\phi_b$  en fonction de  $D/d$ , la ligne solide représente l'équation 7.14 avec  $\xi_\phi = 1$ ,  $\alpha_W = 0.64$ , et  $\beta = 0.19$ .

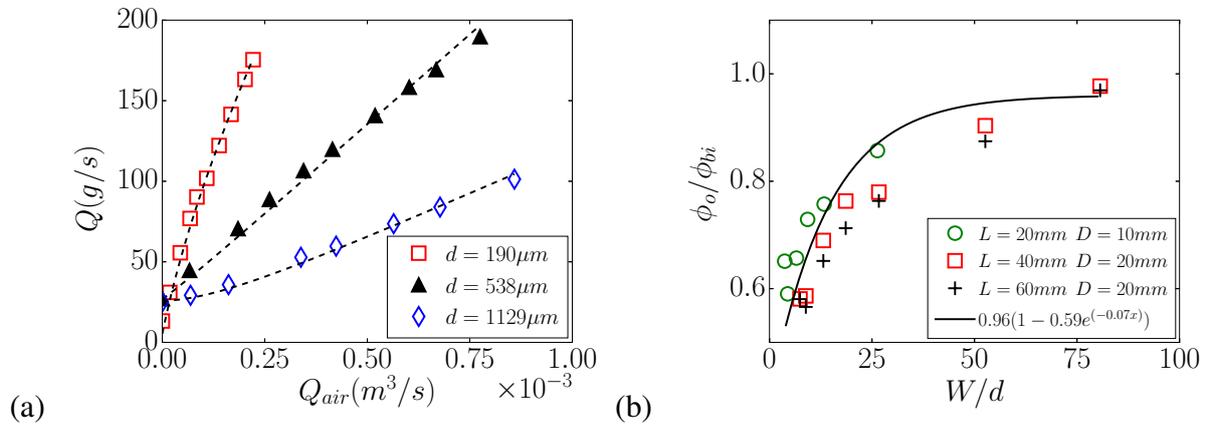


FIGURE 7.9 – Silo cylindrique : (a) Débit massique de particules en fonction du débit volumique d'air  $Q_{air}$  pour ( $L = 60mm$ ,  $D = 20mm$ ,  $W = 10mm$ ) pour 3 tailles de particules. Les lignes pointillées représentent l'équation 7.12 en ajustant  $\phi_o$  par la méthode des moindres carrés. (b)  $\phi_o/\phi_b$  en fonction de  $W/d$ , la ligne solide représente l'équation 7.14 avec  $\xi_\phi = 0.96$ ,  $\alpha = 0.59$ , et  $\beta = 0.07$ .

quement en corrigeant le terme de gravité dans la loi du débit de vidange du silo ouvert et en introduisant le coefficient  $\kappa$ .

### 7.3.4 Prédiction du débit de particules lors d'une injection d'air dans un silo avec un orifice latéral

En utilisant les paramètres obtenus dans le cas d'un silo ouvert (tableau 5.1 du chapitre 5) ainsi que la valeur de  $\xi_\phi = 1$  que nous venons d'obtenir, nous pouvons maintenant utiliser l'équation 7.12, combinée avec les équations 7.6 et 7.14 pour prédire le débit de vidange d'un silo avec un orifice latéral et une injection d'air, quelles que soient les dimensions de l'orifice ( $D$  et  $W$ ), la

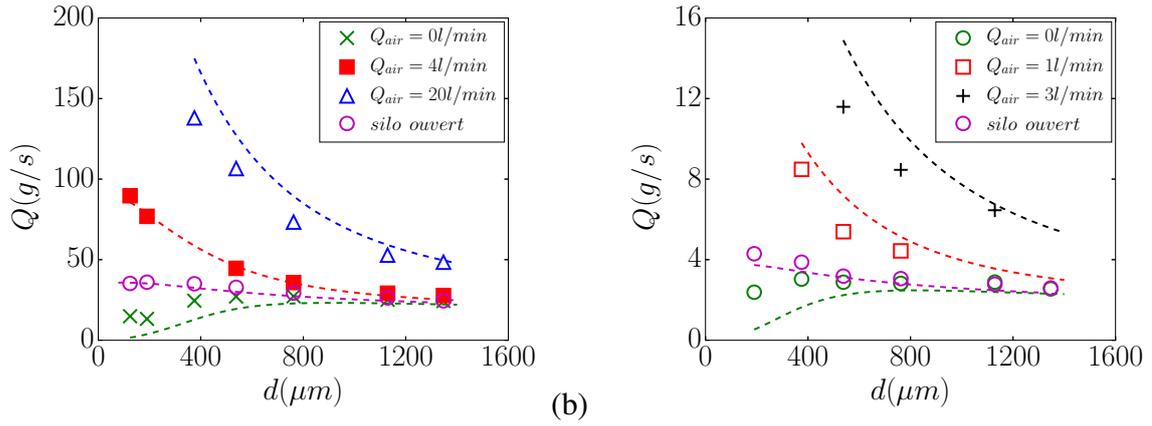


FIGURE 7.10 – Débit massique en fonction de la taille des particules  $d$  pour différents débits volumiques d'air  $Q_{air}$  pour (a) le silo cylindrique ( $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 20\text{mm}$  et  $W = 10\text{mm}$ ) et (b) le silo rectangulaire ( $L = 60\text{mm}$ ,  $D = 10\text{mm}$  et  $W = 3.5\text{mm}$ ), les lignes pointillées représentent l'équation 7.12 avec les paramètres  $C'_{lat}$ ,  $\gamma_2$ ,  $\xi_\phi$ ,  $\alpha_W$  et  $\beta$  obtenus précédemment.

taille des particules  $d$  où le débit d'air imposé  $Q_{air}$ .

Les prédictions de ce modèle empirique sont tracées sur la figure 7.10 et comparées aux expériences nous ayant servi à calibrer le modèle pour (a) le silo cylindrique et (b) le silo rectangulaire. Nous pouvons voir que l'accord entre le modèle (lignes pointillées) et les expériences est relativement bon.

Nous avons fait un certain nombre d'hypothèses pour obtenir ce modèle simplifié, notamment dans la manière d'introduire le paramètre  $\kappa$ . Afin de valider ces hypothèses, nous avons mené une série de simulations numériques continues.

## 7.4 Simulation numérique continue

De la même manière que dans le chapitre précédent, nous avons utilisé la simulation numérique dont les équations implémentées, la méthode de résolution et les conditions aux limites sont présentées dans le chapitre 3 section 3.4.4.b. Ainsi nous nous plaçons dans une configuration où l'orifice est placé latéralement et nous considérons que le milieu granulaire garde une fraction volumique et une perméabilité constantes et uniformes. De plus nous nous sommes limités au régime laminaire et avons négligé le terme inertiel dans la force de traînée qui est alors modélisée par l'équation de Darcy. Enfin, nous avons réalisé deux séries de simulations pour une taille de particule  $L/d = 90$  en considérant des débits d'air variables, d'abord dans le cas 2D puis en pseudo 3D en prenant en compte le terme de friction latérale.

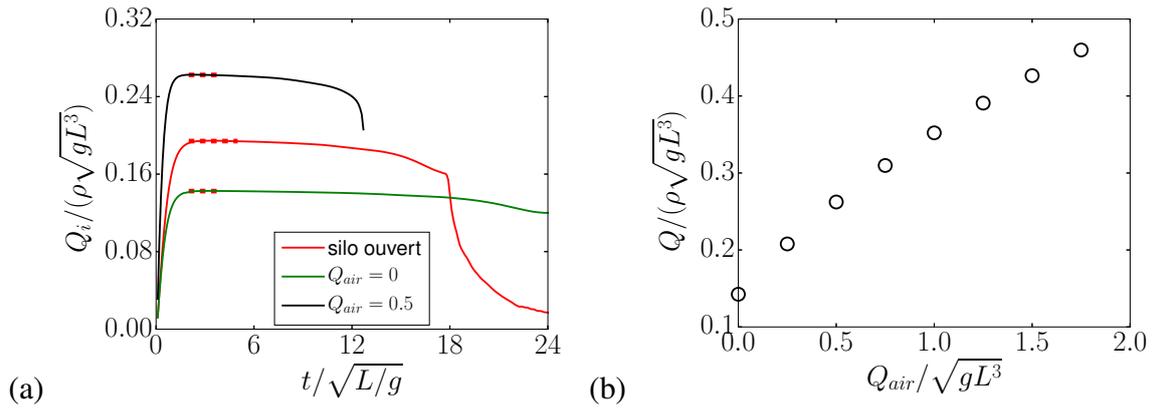


FIGURE 7.11 – Simulation numérique continue 2D : (a) Évolution temporelle du débit de particules instantané  $Q_i/(\rho\sqrt{gL^3})$ , (b) Débit de particules  $Q/(\rho\sqrt{gL^3})$  en fonction du débit d'air  $Q_{air}/(\sqrt{gL^3})$ .

### 7.4.1 Résultats numériques

Sur les figures 7.11 à 7.13 nous pouvons voir que la simulation numérique de la vidange d'un silo avec un orifice latéral et une injection d'air dans le cas 2D reproduit bien les résultats expérimentaux : le débit de vidange est stationnaire et croît avec le débit d'air injecté (figure 7.11). L'évolution temporelle de la pression pour les positions équivalentes aux prises de pression dans l'expérience (figure 7.3) reproduit les même allures pour chaque position que ce soit sur l'axe central vertical ou proche de l'orifice (figure 7.12). Enfin les profils de pression le long de l'axe vertical central, ou le long de l'axe horizontal face aux centres de l'orifice (figure 7.13) sont similaires à ceux observés expérimentalement (figure 7.4).

Les comportements observés dans le cas pseudo 3D sont analogues à ceux présentés dans le cas 2D.

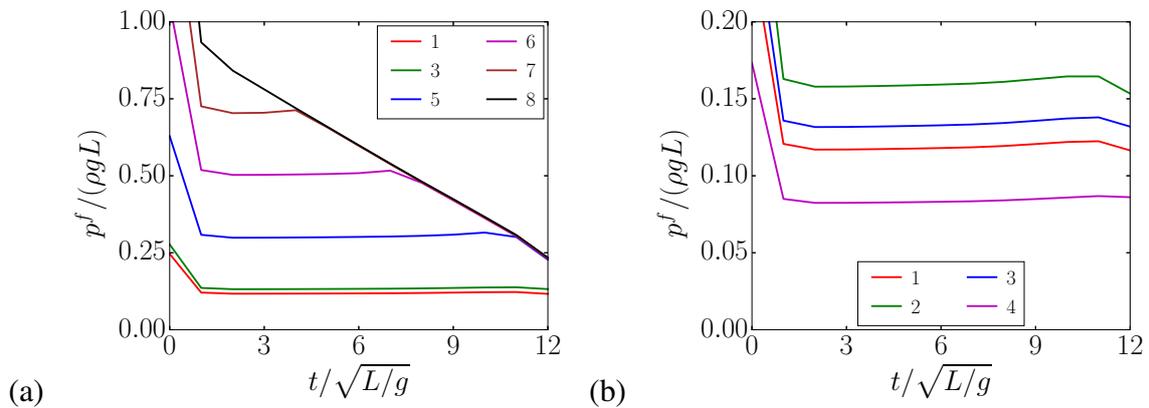


FIGURE 7.12 – Simulation numérique continue 2D : Évolution temporelle de la pression  $p^f/(\rho g L)$  pour  $Q_{air}/\sqrt{gL^3} = 0.5$  (a) le long de l'axe vertical central et (b) près de l'orifice. La numérotation de la position est équivalente à celle de la figure 7.3a).

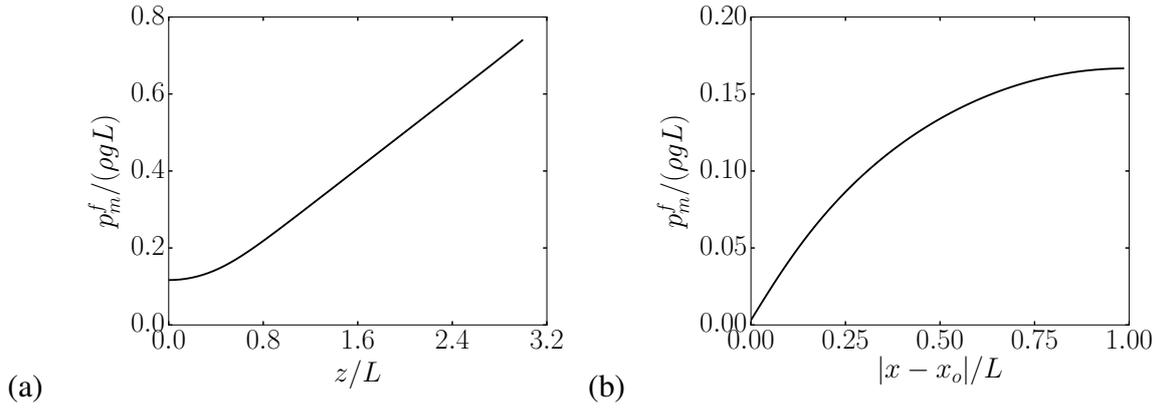


FIGURE 7.13 – Simulation numérique continue 2D : profil de pression moyenne  $p_m^f / (\rho g L)$  pour  $Q_{air} / \sqrt{g L^3} = 0.5$  (a) le long de l’axe vertical central en fonction de  $z/L$ , (b) le long de l’axe horizontal face au centre de l’orifice en fonction de  $|x - x_o|/L$ .

## 7.4.2 Comparaison avec le modèle analytique simple

En rassemblant le modèle discuté dans le chapitre 6 pour la simulation numérique et les observations développées dans la partie expérimentale, nous pouvons modéliser la vidange de silo avec un orifice latérale et injection d’air dans le régime visqueux décrit par la loi de Darcy par :

$$\bar{Q} = \frac{\sqrt{\mathcal{N}_l^2 + 4(1 + \mathcal{N}_l \bar{Q})} - \mathcal{N}_l}{2} \quad (7.15)$$

Mais avec le nombre sans dimension :

$$\mathcal{N}_l = \frac{A \eta \beta_l (\phi_o) Q_o}{\phi_o^2 \rho_p^2 \kappa g S_o}$$

Le coefficient  $A$  correspond à la prise en compte du gradient de pression horizontal moyenné sur la zone autour de l’ouverture, délimitée par  $\sqrt{(x - x_o)^2 + (z - z_o)^2} \leq D/2$  :

$$\frac{\partial p^f}{\partial x} \Big|_{\cap} = A \eta \beta_l \frac{Q_{air} - Q/\rho}{S_o} = A \frac{\partial p^f}{\partial x} \Big|_{x=x_o} \quad (7.16)$$

Sur la figure 7.14, nous avons représenté le gradient de pression moyenné sur la zone autour de l’ouverture ( $\times$ ) en fonction de  $\frac{\eta \beta_l}{S_o} (Q_{air} - Q/\rho)$ . Nous retrouvons que ces données sont bien ajustées par une droite de coefficient  $A = 0.67$ .

Le coefficient  $\kappa$  provient de la modélisation du passage de l’orifice inférieur à l’orifice latéral. Il s’obtient en utilisant l’équation 7.8,  $\kappa = (C'_{lat}/C'_{inf})^2$ . En utilisant les coefficients obtenus au chapitre 4,  $C'_{inf} = 1.29$ , et au chapitre 5,  $C'_{lat} = 0.76$ , nous obtenons  $\kappa = 0.36$ .

Sur la figure 7.15 nous comparons les résultats numériques du débit de particule en fonction du débit d’air avec le modèle donné par l’équation 7.15 pour (a) un cas 2D ( $D = 0.40625L$ ) et

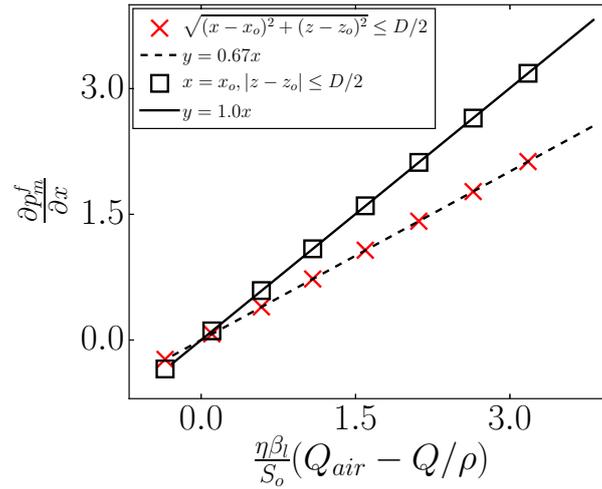


FIGURE 7.14 – (a) Gradient de pression  $\frac{\partial p_m^f}{\partial x}$  (□) moyenné sur l’orifice et (×) moyenné dans la zone au dessus de l’orifice  $\sqrt{(x - x_o)^2 + (z - z_o)^2} \leq D/2$  en fonction de  $\frac{\eta\beta_l}{S_o}(Q_{air} - Q/\rho)$ .

(b) un cas pseudo 3D ( $D = 0.40625L$ ,  $W = 0.25L$ ). Nous pouvons voir que si nous prenons  $A = 1$  et  $\kappa = 1$  (–) nous sous-estimons le débit de particule dans chaque cas. Par contre si nous prenons en compte la correction due au passage orifice inférieur/orifice latéral  $\kappa = 0.36$  en gardant  $A = 1$  (– –) nous surestimons le débit de particule. Enfin nous observons que les données sont bien décrites (– –) si l’on tient compte des deux paramètres à la fois  $A = 0.67$  et  $\kappa = 0.36$  que ce soit dans le cas (a) 2D ou (b) pseudo 3D. Ceci semble valider l’approche analytique : l’écoulement d’air génère simplement une force en volume sur les particules qu’il faut rajouter au terme moteur  $\kappa g$ . D’une même manière que pour le cas d’un orifice en bas du silo, traité dans le chapitre précédent, le débit des particules étant contrôlé par l’écoulement proche de la sortie, il faut évaluer cette force de traînée sur la zone de l’orifice. Enfin, cette étude numérique suggère que nous avons bien défini le paramètre  $\kappa$  comme un paramètre exclusivement lié à la position de l’orifice et non à l’effet de friction sur les parois latérales.

## 7.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre nous avons étudié la configuration d’intérêt qui concerne la vidange d’un silo assistée par une injection d’air lorsque l’orifice est placé latéralement. Nous avons montré que le débit des particules dépend fortement du débit d’air imposé et de la taille des particules. L’étude réalisée suggère qu’il faut considérer que les particules se dilatent dans la zone de l’orifice. Nous avons montré expérimentalement et à l’aide de simulations numériques que, même si les phénomènes physiques conduisant à la loi de vidange d’un silo ouvert possédant un orifice latéral ne sont pas encore élucidés, l’effet de la position de l’orifice peut être représenté par un unique coefficient  $\kappa$  tel que le terme moteur soit  $\kappa g$ . En présence du gaz, nous avons alors supposé que le gradient de pression horizontal se rajoute au terme moteur, de sorte que l’on a obtenu la loi

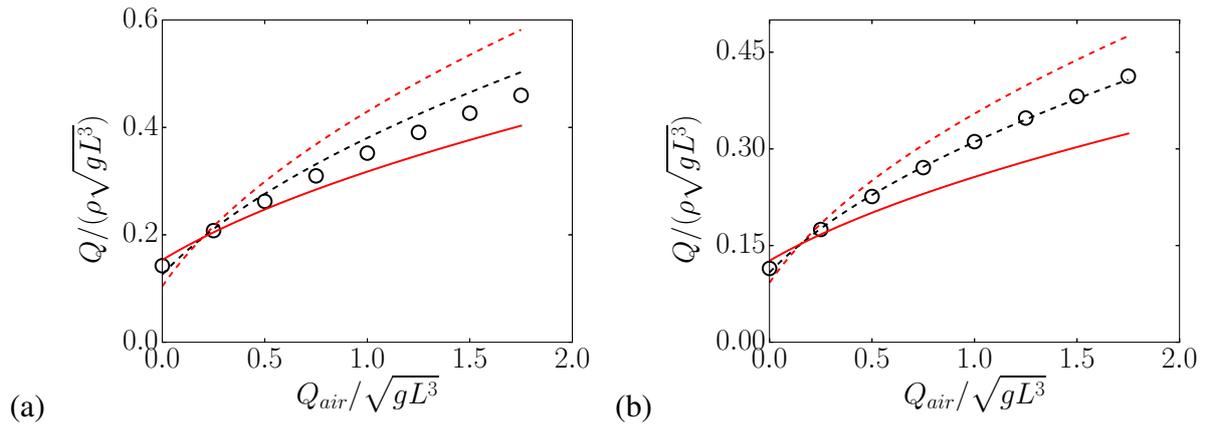


FIGURE 7.15 – Simulation numérique continue :  $Q/\rho\sqrt{gL^3}$  en fonction de  $Q_{air}/\sqrt{gL^3}$  pour (a) un cas 2D ( $D = 0.40625L$ ) (b) un cas pseudo 3D ( $D = 0.40625L$ ,  $W = 0.25L$ ). Les courbes continues représentent l'équation 7.15 avec (—)  $A = 1$  et  $\kappa = 1$ , (---)  $A = 1$  et  $\kappa = 0.36$ , (---)  $A = 0.67$  et  $\kappa = 0.36$ .

de vidange du silo avec orifice latéral et injection d'air (équation 7.9). Cette équation représente raisonnablement bien les données dans le cas expérimental comme dans la simulation que ce soit pour un silo 2D ou un silo pseudo 3D en prenant en compte la friction sur les parois.

Dans le chapitre suivant nous proposons une analyse plus approfondie des résultats des simulations numériques continues sans injection d'air, afin d'apporter des éléments sur la compréhension des phénomènes physiques conduisant à la loi de vidange.



# Chapitre 8

## Analyse de la simulation d'une rhéologie viscoplastique

Nous avons vu dans les chapitres précédents que la résolution numérique à l'aide du logiciel *Basifisk* du modèle rhéologique viscoplastique avec une fraction volumique constante au sein du milieu granulaire permettait de retrouver l'évolution correcte phénoménologiquement du débit d'un silo d'ouverture  $D \times W$  et ce pour les deux positions (inférieure ou latérale) de cette ouverture. En particulier, on retrouve à l'aide de ces calculs, en introduisant un terme de frottement supplémentaire représentant l'influence des parois, le fait que la dimension  $W$  influence le débit surfacique différemment suivant cette position. La résolution numérique de ce modèle permet d'analyser les différentes contributions à la dynamique du milieu granulaire, à savoir les champs de vitesse et de contraintes internes au silo, ce qui reste complexe à déterminer expérimentalement. On cherche alors à analyser ce qui détermine la vitesse débitante au sein d'une telle simulation, pour les cas sans couplage avec l'air.

Notons que ce chapitre correspond à des résultats d'analyse qui ne sont pas toujours conclusifs et c'est pour cela qu'il a été choisi d'isoler ces analyses du reste des développements. Néanmoins, la manière avec laquelle les résultats de la simulation ont pu être analysés apporte un complément important aux résultats précédents. Il s'agit à cet égard d'une tentative d'interprétation de la dépendance observée du débit en fonction des frottements à la paroi.

### 8.1 Analyse du cas de l'orifice inférieur

Dans un premier temps, on s'intéresse au cas d'une vidange avec un orifice inférieur.

#### 8.1.1 Les champs eulériens

La résolution numérique par un modèle continu de l'écoulement granulaire permet naturellement une représentation eulérienne des grandeurs au sein de l'écoulement. On considère ici un

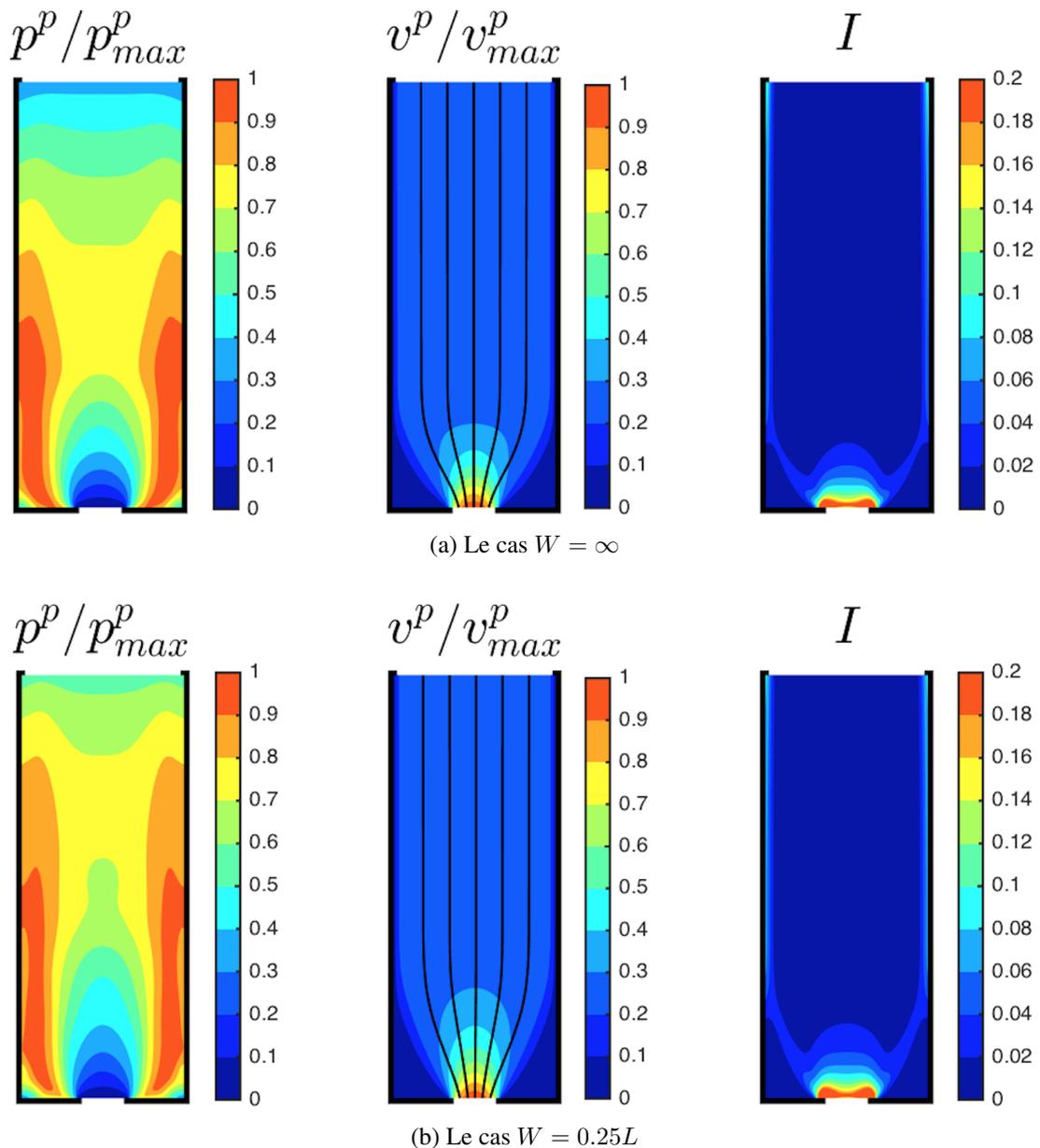


FIGURE 8.1 – Champs instantanés ( $t/\sqrt{L/g} = 4$ ). De gauche à droite : pression  $p^p$  réduite par sa valeur maximale au sein du silo, la vitesse verticale  $v^p$  réduite par sa valeur maximale, les lignes continues représentant des lignes de courant, et le nombre sans dimension  $I$  sur la gamme  $[0 : 0.2]$ .

instant particulier des simulations pendant le régime stationnaire de la vidange. La série d'images de la figure 8.1 montre des champs de pression granulaire, vitesse granulaire verticale, des lignes de courant et le champ du nombre  $I$  pour une simulation *Basilišk* de la vidange d'un silo avec un orifice en bas.

On s'intéresse dans un premier temps au cas 2D, c'est à dire sans prise en compte du frottement sur les faces avant et arrière du silo ( $W = \infty$ ), figure 8.1a. La pression granulaire (l'image la plus à gauche) se répartit de la manière suivante au sein du silo (de haut en bas) :

- la pression augmente tout d'abord sous l'effet du poids du milieu granulaire avant de saturer.

En haut du domaine de calcul, elle varie peu horizontalement mais elle est rapidement plus importante près des parois latérales du silo. Il s'agit dans les deux cas d'un report partiel du poids des particules vers les parois, ce qui s'apparente à un effet de Janssen

- dans la partie médiane du silo, la pression devient quasiment uniforme le long de la ligne de courant centrale. La variation horizontale est marquée près des parois. La pression rediminue proche paroi ce qui est conforme au choix de la condition aux limites de non-glissement comme cela a pu être montré dans [Staron \*et coll.\* \[2014\]](#).
- dans la zone la plus basse, dont la hauteur est de l'ordre de la largeur du silo (plusieurs fois la taille de l'orifice), la pression au centre du silo diminue graduellement tandis qu'elle reste élevée près des parois du silo. Horizontalement la pression varie donc fortement notamment dans la zone la plus basse.
- le niveau de pression maximal sur l'axe de symétrie du silo dépend a priori de  $L$  et ne pilote pas la vidange (dont le débit ne dépend pas de  $L$ ).

Le champ de la norme de vitesse évolue de la manière suivante :

- dans la majeure partie du silo, tant qu'on se place à une hauteur supérieure à la largeur du silo, la vitesse verticale est très uniforme
- dans la partie basse, l'augmentation de la vitesse verticale devient réellement importante sur une zone de l'ordre de grandeur de la taille de l'orifice. La zone morte de l'écoulement semble délimitée par une frontière formant un angle quasi constant avec la verticale

Le champ du nombre  $I = \frac{\dot{\gamma}d}{\sqrt{p^p/\rho_p}}$ , conséquence des deux champs précédents, montre que ce paramètre a des valeurs relativement faibles dans l'ensemble du silo. Il prend une valeur plus importante le long des parois et de la zone morte où le cisaillement est important (ligne bleu plus clair), mais surtout dans la zone autour de l'orifice où l'accélération est importante et la pression granulaire est faible. La valeur maximale  $\approx 0.2$  montre que le milieu granulaire reste en régime dense près de la sortie.

Sur les images de la figure 8.2, les valeurs prises par la viscosité effective  $\eta$  utilisée pour modéliser la rhéologie sont illustrées. L'échelle de l'image la plus à gauche permet d'illustrer les zones de l'écoulement au sein desquelles cette variable atteint la valeur seuil de 100 utilisée pour régulariser le problème (zones où le cisaillement est proche de 0). Ces zones correspondent aux centres de la partie supérieur du silo et des zones mortes (coins inférieurs du domaine de calcul). L'image à sa droite montre les valeurs de  $\eta$  sur la gamme  $[0 : 1]$  qui concerne une zone de hauteur de l'ordre de la largeur du silo au dessus de l'orifice. La viscosité effective est relativement faible dans ces zones où la pression granulaire décroît à l'approche de l'orifice et/ou le cisaillement associé à la convergence de l'écoulement vers l'orifice est grand.

D'une manière qualitative, le résultat prédit par cette rhéologie est conforme à celui prédit par des simulations utilisant les éléments discrets comme cela a été montré dans [Staron \*et coll.\* \[2014\]](#).

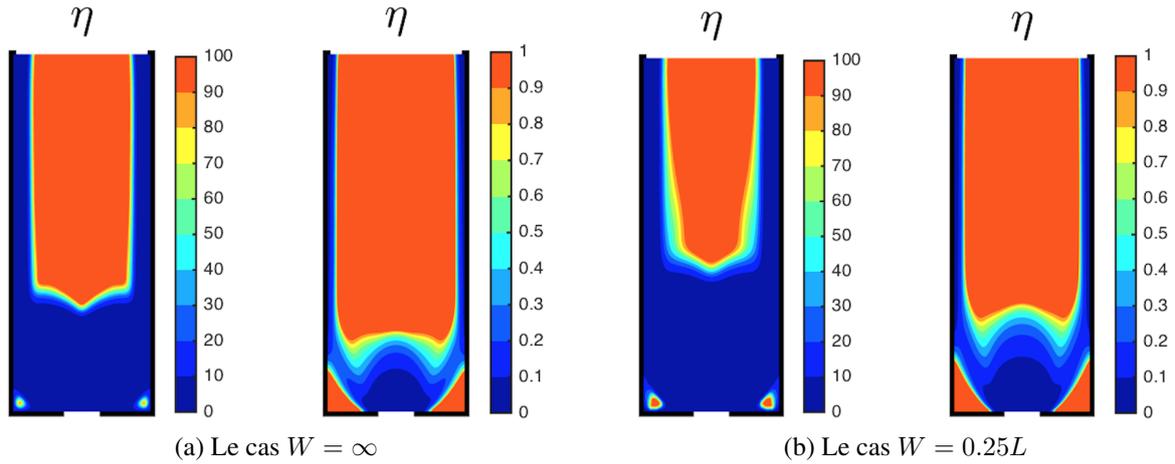


FIGURE 8.2 – Champs instantanés ( $t/\sqrt{L/g} = 4$ ) de la viscosité effective  $\eta$ . Sur l'image de gauche, l'échelle va de 0 à  $\eta_{max} = 100$ , valeur utilisée pour la régularisation du modèle. Sur l'image de droite la gamme est [0 : 1].

On s'intéresse alors au cas où  $W = 0.25L$ , soit les images de la figure 8.1b. Par rapport au cas précédent on remarque principalement que

- le champ de pression granulaire est modifié dans la partie basse et centrale du silo : la pression granulaire est localement plus faible et la zone où elle commence à décroître débute à une élévation plus importante au sein du silo.
- le champ de vitesse verticale est également modifié dans la partie basse : la convergence de l'écoulement vers l'orifice se produit sur une zone plus étendue axialement ce qui diminue l'angle de la zone morte avec la verticale
- ces modifications des champs de vitesse et de pression n'ont pas d'impact notable sur le nombre  $I$

Les valeurs prises par le coefficient  $\eta$  illustrent de manière équivalente ces résultats (voir figure 8.2b) : les zones centrales où  $\eta > 100$  sont décalées vers le haut du silo lorsque  $W$  est faible et la zone où  $0 < \eta < 1$  occupe une hauteur plus importante au dessus de l'orifice.

On rappelle ici que la taille  $W$  n'a pas d'influence observée sur le débit de vidange pour cette géométrie.

### 8.1.2 Le bilan de quantité de mouvement

Pour approfondir l'analyse, on considère désormais les différentes contributions au bilan de quantité de mouvement verticale de la phase granulaire le long de l'axe de symétrie du silo qui est aussi une ligne de courant. Ce bilan s'écrit :

$$\rho v^p \frac{\partial v^p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{zx}^p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}^p}{\partial z} - \frac{\partial p^p}{\partial z} + 2 \frac{\mu_W p^p}{W} - \rho g \quad (8.1)$$

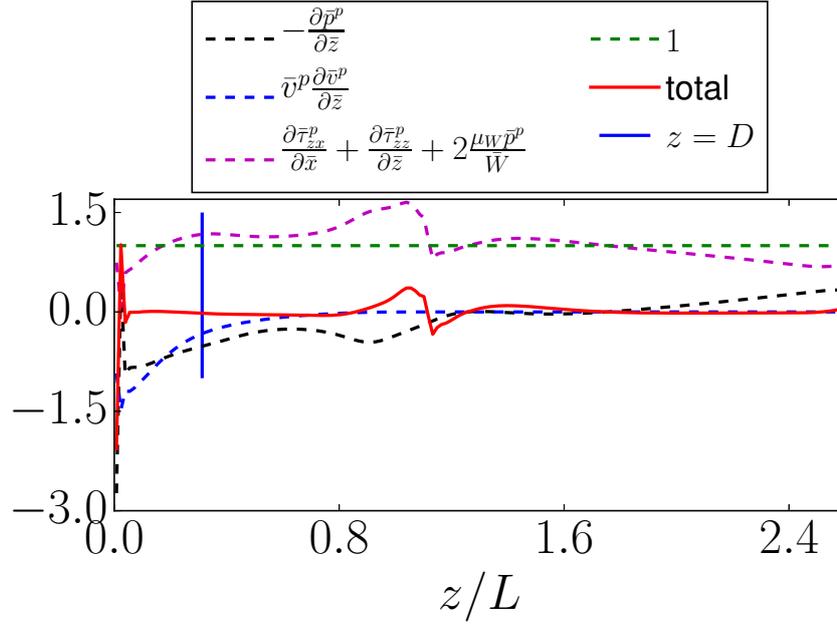


FIGURE 8.3 – Résultat dans un cas avec effet de friction  $W = 0.25L$  : bilan de quantité de mouvement suivant  $z$ .

Les grandeurs sont alors exprimées en échelle réduite en utilisant les grandeurs physiques du problème que sont : la largeur du silo  $L$ , la densité de particules  $\rho$  et la gravité  $g$ . Ainsi, on écrit les vitesses  $\bar{v}^p = v^p/\sqrt{gL}$ , la pression du granulaire  $\bar{p}^p = p^p/(\rho gL)$ , le terme déviatorique de la contrainte granulaire  $\bar{\tau}_{ij} = \tau_{ij}/(\rho gL)$ , les longueurs  $\bar{z} = z/L$  et  $\bar{W} = W/L$ . L'équation 8.1 devient donc :

$$\bar{v}^p \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}^p}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zz}^p}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{p}^p}{\partial \bar{z}} + 2 \frac{\mu_W \bar{p}^p}{\bar{W}} - 1 \quad (8.2)$$

Sur la courbe de la figure 8.3, on a tracé les différents termes de cette équation en fonction de la distance à l'orifice pour le cas  $W = 0.25L$ . L'équilibrage du terme gravitaire correspond à un terme de valeur 1 (courbe en pointillés verts). On voit clairement que le terme gravitaire est principalement équilibré par la somme du gradient du terme déviatorique de la contrainte granulaire et du frottement pariétal (courbe en pointillés mauve). On note une zone autour de  $z = L$  pour laquelle le bilan de quantité de mouvement est fortement perturbé. Il s'agit d'un artefact numérique associé à la modélisation de la rhéologie par une viscosité effective régularisée dont nous ne tenons pas compte dans l'analyse.

**Accélération et chute libre** Plus bas (pour  $z < 0.8L$  environ), le milieu granulaire accélère le long de l'axe de symétrie du silo ( $\bar{v}^p \frac{\partial \bar{v}^p}{\partial \bar{z}} < 0$ , courbe en pointillés bleus). La barre verticale représente l'altitude  $D$  au sein du silo. On observe clairement que l'accélération débute au dessus de cette altitude et qu'elle est plus faible qu'une accélération gravitaire (auquel cas le terme vaudrait  $-1$ , ce vers quoi il ne tend qu'au niveau même de l'orifice). On retrouve donc ici

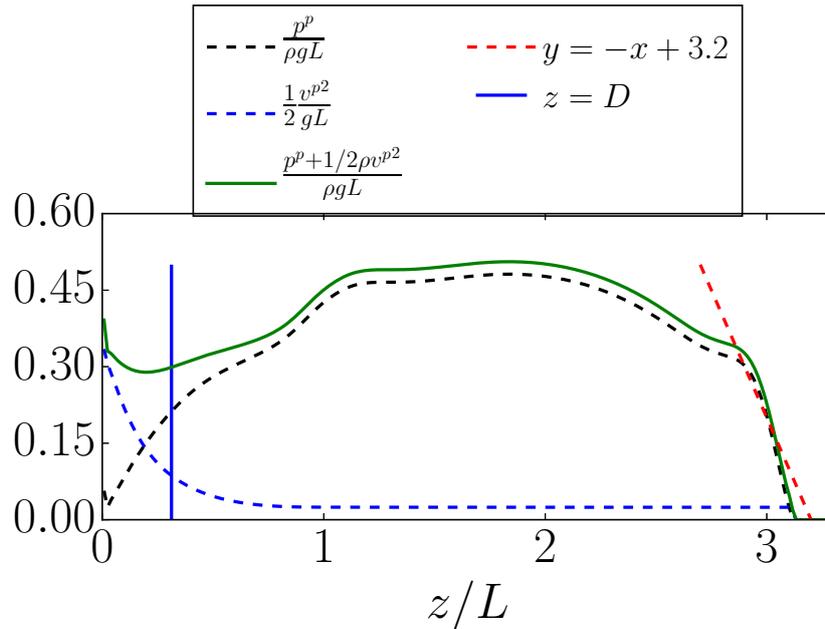


FIGURE 8.4 – Résultat dans un cas avec effet de friction  $W = 0.25L$  : Énergie cinétique et pression granulaire le long de l’axe de symétrie

avec la résolution d’un modèle continu le résultat obtenu expérimentalement et numériquement en résolvant un modèle discret par Rubio-Largo *et coll.* [2015]. Si ce résultat permet d’éliminer l’hypothèse selon laquelle il existe au-dessus d’un orifice une zone où les contacts entre particules disparaissent (sous l’effet d’un arche de taille comparable à celle de l’orifice) et chutent librement, il ne permet pas d’identifier le mécanisme menant à la mise à l’échelle du débit par  $\sqrt{D}$ .

**Pression granulaire et charge** Le niveau de pression granulaire au cœur du silo évolue le long de la ligne de courant centrale comme représenté sur le graphe 8.4 (courbe en pointillés noirs) :

- En haut du milieu granulaire ( $z \simeq 3L$ ), la pression granulaire augmente selon une pente proche de  $\rho g$  (voir la ligne rouge en pointillées).
- rapidement cette augmentation est moindre, puis le niveau de pression granulaire est quasiment constant pour  $1 < z/L < 2$ .
- pour  $z < L$ , la pression granulaire décroît de manière non linéaire ( $\partial p^p / \partial z \neq cste$ ) jusqu’à sa valeur nulle à l’orifice

On a tracé sur cette même courbe l’énergie cinétique réduite des particules  $\frac{1}{2} \frac{v^p^2}{gL}$  ainsi que la somme de la pression granulaire et de cette énergie, ce qui correspond à l’équivalent d’une charge hydraulique à laquelle on aurait retiré le terme gravitaire. On se demande alors si cette somme n’est pas conservée le long de la ligne de courant centrale à l’instar d’un écoulement d’un fluide newtonien sans perte de charge ni variation de l’énergie potentielle de pesanteur. En effet, le terme gravitaire semble principalement équilibré par les frottements (inter-granulaire et pariétaux). On

observe que cette somme est principalement égale au terme de pression granulaire dans le haut du silo, où la vitesse de l'écoulement est relativement faible car l'écoulement se produit sur la largeur  $L$  du silo. Pour  $z/L < 1$ , le terme cinétique commence à être important et à compenser partiellement la décroissance de la pression granulaire, sans pour autant que la somme soit constante. Ceci est logique car la pression granulaire est mise à l'échelle par  $gL$  dans la partie supérieure tandis que l'énergie cinétique en sortie (liée au débit pour un orifice inférieur car la vitesse est principalement verticale) est à l'échelle avec  $gD$ . Néanmoins, pour  $z < D$  (matérialisée par la partie à gauche de la ligne verticale  $z = D$  sur la courbe), on observe que la somme ne décroît plus.

On s'intéresse alors plus précisément aux valeurs particulières de  $p^p$  et de  $v^p$  à une hauteur donnée.

### 8.1.3 Pression granulaire et frottements

On a vu précédemment que le champ de pression granulaire dépendait qualitativement de  $W$ . Dans les parties du silo où le terme d'accélération est négligeable dans l'équilibre du bilan de quantité de mouvement ( $z > D$  principalement), on propose alors de considérer l'équilibre des contraintes pour deux zones de l'écoulement au sein du silo. On reproduit en cela les bilans de force tels qu'exprimés par exemple dans [Jop et coll. \[2005\]](#).

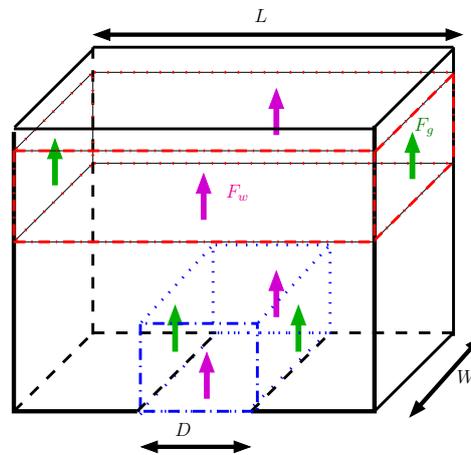


FIGURE 8.5 – Schéma des zones

**À une distance  $D$  de l'orifice** Dans une première zone où l'écoulement est réparti sur la largeur  $D$  (représentée en bleu sur le schéma de la figure 8.5), on suppose que les forces sur les frontières de cette zone s'équilibrent avec la gravité et ainsi que

$$2\bar{F}_g + 2\bar{F}_w + P = 0 \quad (8.3)$$

où  $\bar{F}_g$  représente le frottement avec le milieu granulaire,  $\bar{F}_w$  avec les parois du silo et  $P$  le poids. On considère alors une zone de hauteur  $\partial\lambda$  centrée sur  $z = \lambda \simeq D$  où  $p^p$  varie peu.

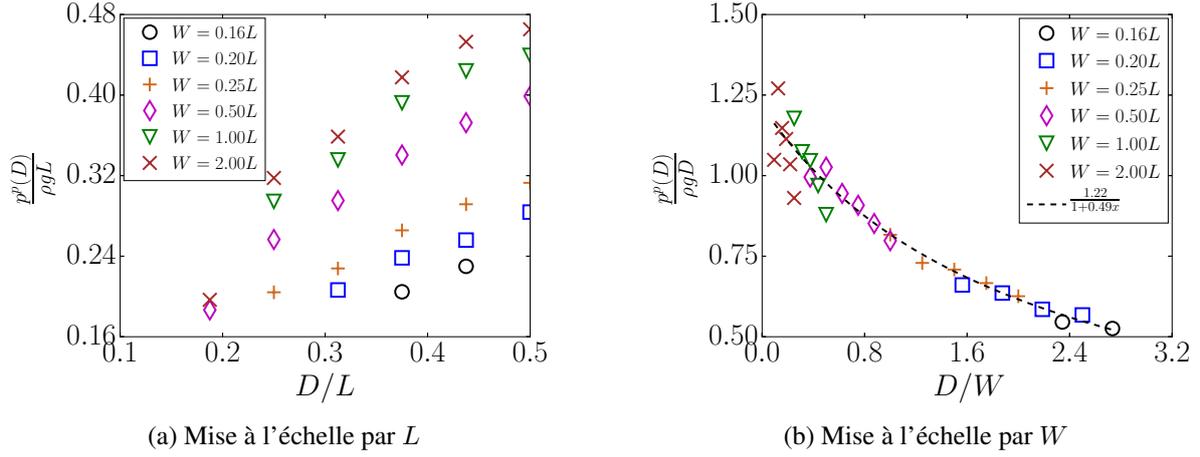


FIGURE 8.6 – La pression granulaire à une distance  $D$  de l'orifice

On estime alors  $\bar{F}_g$  en intégrant sur l'épaisseur  $W$  du silo

$$\bar{F}_g = \int_{y=0}^W \int_{z=\lambda}^{\lambda+\partial\lambda} \mu(I) p^p(x = D/2) \partial y \partial z \propto \mu_s p^p(\lambda) W \partial\lambda \quad (8.4)$$

et  $\bar{F}_w$ , en intégrant sur la taille  $D$  de l'orifice, il vient

$$\bar{F}_w = \int_{x=-D/2}^{D/2} \int_{z=\lambda}^{\lambda+\partial\lambda} \mu_w p^p(y = W/2) \partial x \partial z \propto \mu_w p^p(\lambda) D \partial\lambda \quad (8.5)$$

Comme  $P = \rho g D \partial\lambda W$ , il vient alors,

$$2\alpha_1 \mu_s p^p(\lambda) W \partial\lambda + 2\alpha_2 \mu_w p^p(\lambda) D \partial\lambda = \rho g D \partial\lambda W \quad (8.6)$$

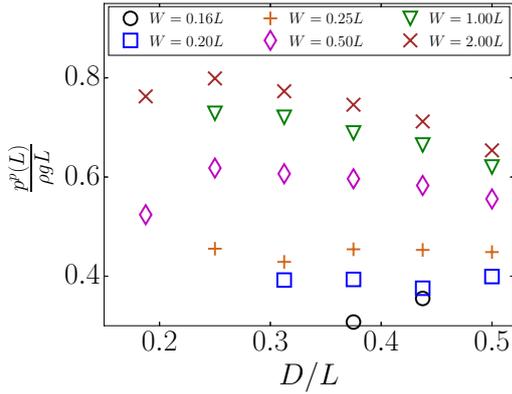
et la pression granulaire s'écrit

$$p^p(\lambda) = \frac{\rho g D W}{2\alpha_1 \mu_s W + 2\alpha_2 \mu_w D} \quad (8.7)$$

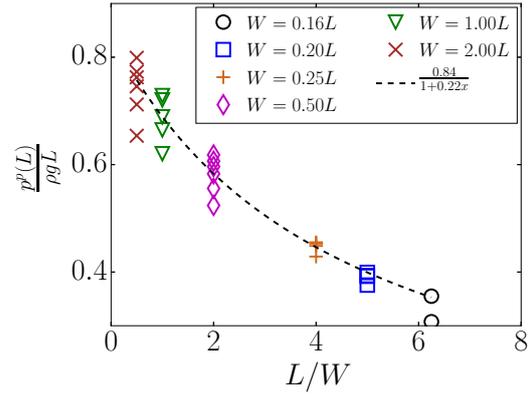
soit en divisant par l'échelle de pression  $\rho g D$ ,

$$\frac{p^p(\lambda)}{\rho g D} = \frac{\gamma_1}{1 + \gamma_2 D/W} \quad (8.8)$$

avec  $\gamma_1 = 1/(2\alpha_1 \mu_s)$  et  $\gamma_2 = (\alpha_2 \mu_w)/(\alpha_1 \mu_s)$ . Cette formule prédit alors que la pression granulaire dans cette zone dépend uniquement de  $D/W$ . On considère le point de l'axe de symétrie du silo à une distance  $z = D$  de l'orifice comme faisant partie de cette zone. Sur la courbe de la figure 8.6a, on a tracé la pression en ce point  $p^p(D)$  en fonction de  $D/L$  pour différentes valeurs de  $W$ . La pression granulaire dépend fortement de  $W$  à  $D$  et  $L$  fixés. Conformément à notre analyse qualitative des champs, on observe que lorsque  $W$  diminue, la pression granulaire à une



(a) Mise à l'échelle par  $L$



(b) Mise à l'échelle par  $W$ , en fonction de  $L/W$

FIGURE 8.7 – La pression granulaire à une distance  $L$  de l'orifice

élévation  $D$  au sein du silo diminue. Sur la courbe de la figure 8.6b, on a tracé la pression en fonction de  $D/W$ . On voit que la formule de l'équation 8.8 est tout à fait cohérente avec les résultats numériques. La courbe en pointillé indique l'ajustement de la formule par la méthode des moindres carrés. Les coefficients indiquent que la pression en  $D$  est mise à l'échelle par  $\rho g D$  dès lors que  $D/W \ll 2$  et par  $\rho g W$  dès lors que  $D/W \gg 2$ . On a donc deux régimes pour cette pression granulaire. On retrouve ici un comportement de la pression en  $z = D$  pour un silo avec un trou en bas similaire à celui du débit avec un trou sur le côté (chapitre 5). Ainsi, même si le frottement sur les parois n'affecte pas le débit il affecte le gradient de pression granulaire à la sortie de manière quantitative.

**Loi de l'orifice** La deuxième zone considérée se situe plus haut dans le silo, disons  $z = \lambda' > L$  comme la zone rouge sur le schéma de la figure 8.5. Si on fait un bilan similaire à celui déjà réalisé, on trouve,

$$p^p(\lambda') = \frac{\rho g L W}{2\alpha'_1 \mu_s W + 2\alpha'_2 \mu_w L} \quad (8.9)$$

$$\frac{p^p(\lambda')}{\rho g L} = \frac{\gamma'_1}{1 + \gamma'_2 L/W} \quad (8.10)$$

avec  $\gamma'_1 = 1/(2\alpha'_1 \mu_s)$  et  $\gamma'_2 = (\alpha'_2 \mu_w)/(\alpha_1 \mu_s)$ . On trace alors l'évolution de la pression à une distance  $L$  de l'orifice sur la figure 8.7. Sur la courbe 8.7a, on voit que la dépendance en  $D/L$  n'est pas régulière ni marquée tandis que la dépendance en  $W$  reste forte. Sur la courbe 8.7b, on observe un bon accord avec la formule prédite par l'équation 8.10 (courbe en pointillé). même si une influence secondaire de  $D$  est clairement observable.

**Complément sur la vitesse** On sait déjà que ces dépendances de la pression en  $W$  ne se répercutent pas sur les vitesses, sinon nous aurions observé une dépendance du débit de vidange en  $W$ .

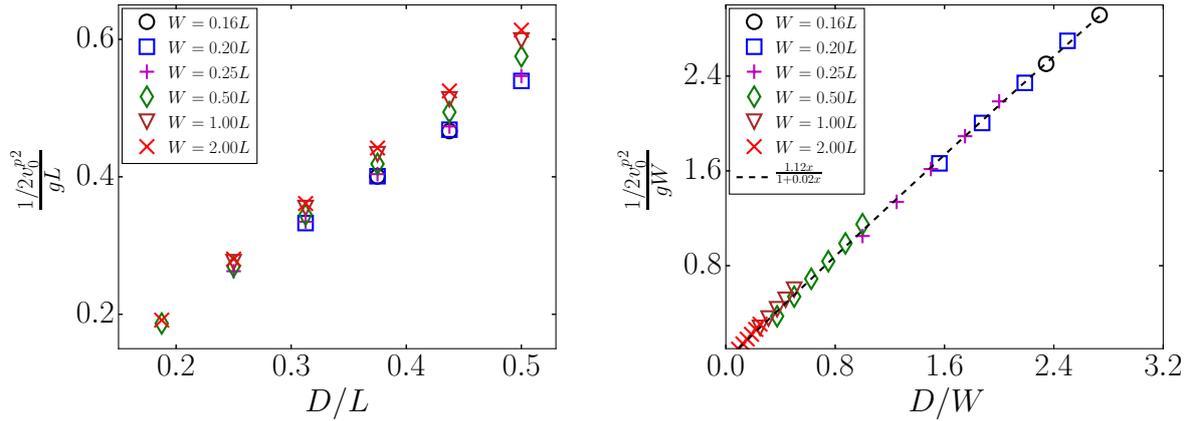


FIGURE 8.8 – Énergie cinétique des particules sur la ligne centrale au niveau de l’orifice

Néanmoins, on représente sur la figure 8.8 l’évolution de la vitesse verticale à la sortie, sur l’axe de symétrie du silo. On observe sur la courbe de gauche que le débit dépend tout de même faiblement de  $W$  pour les plus grandes valeurs de  $D/L$ . Ainsi, l’ajustement de la dépendance de la vitesse débitante en  $D/W$  proposé sur la courbe de droite prédit que le débit devrait dépendre uniquement de  $W$  pour  $D/W \gg 50$  (coefficient 0.02 au dénominateur de l’ajustement de la courbe par la méthode des moindres carrés). Des expériences complémentaires seraient nécessaires pour confirmer cette extrapolation, cette valeur n’étant pas couverte par nos expériences.

### 8.1.4 Zone morte

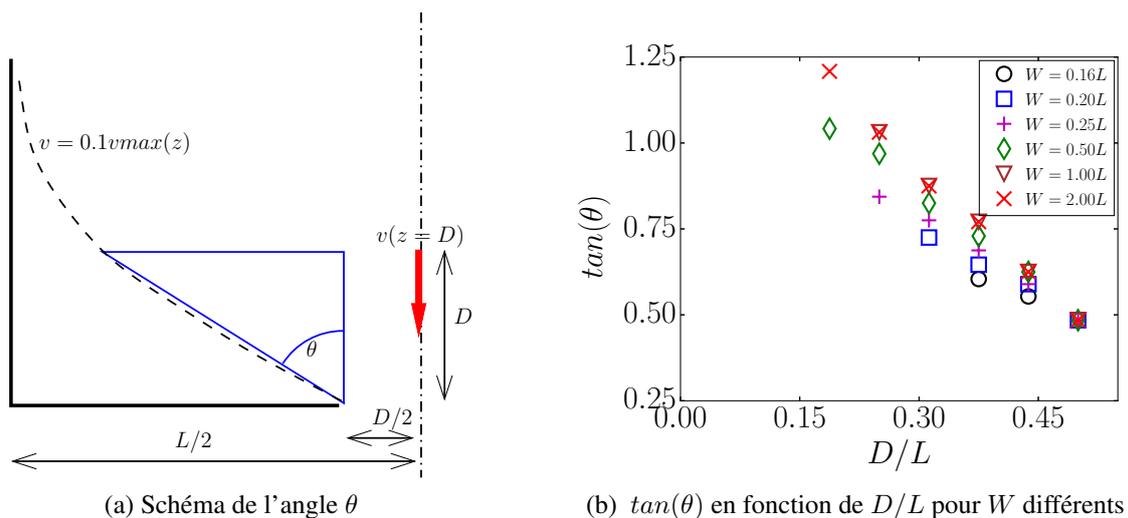


FIGURE 8.9 – Angle de la zone morte  $\theta$

On définit l’angle  $\theta$  de la zone morte par rapport à la verticale selon le schéma représenté sur la figure 8.9a. L’angle de repos de l’écoulement granulaire sur les bords de l’orifice dépend

principalement de  $D/L$  comme on peut le voir sur la courbe de gauche de la figure 8.9b. Pour de faibles valeurs de ce paramètre  $D/L$ , on observe une dépendance légère en  $W$  : quand  $W$  diminue, l'angle diminue. En effet, l'écoulement converge vers l'orifice depuis une altitude plus importante quand  $W$  diminue et il est donc plus vertical près de l'orifice. La zone morte est donc d'autant plus importante que  $W$  est petit. Sur la courbe de droite, on voit que lorsque  $D$  augmente, à  $W$  fixé, l'angle diminue car la convergence est moins importante.

### 8.1.5 Influence des paramètres rhéologiques

La loi viscoplastique dans les zones de l'écoulement est principalement portée par la valeur du coefficient de friction effectif  $\mu_s$  correspondant aux faibles valeurs de  $I$ . Pour des valeurs basses de  $\mu_s$ , le débit au sein du silo n'est pas nécessairement stationnaire. La valeur à partir de laquelle le débit est effectivement quasi-stationnaire durant la vidange est de l'ordre de  $\mu_s = 0.32$  pour le cas  $W = \infty$ , comme illustré sur la courbe de la figure 8.10a pour  $D = 0.125L$ . Notons aussi que la valeur du débit stationnaire dépend de  $\mu_s$  (le débit décroît quand  $\mu_s$  augmente). Des valeurs plus importantes de ce paramètre mènent à des instabilités numériques dans le débit. Dans ces études, nous avons utilisé la valeur  $\mu_s = 0.4$  qui est classiquement retenue pour le modèle  $\mu(I)$  dans ce type d'approches numériques, [Staron et coll. \[2014\]](#), et qui correspond aux valeurs préconisées par [Jop et coll. \[2006\]](#). En introduisant une source de frottement supplémentaire sur les parois (terme en  $\mu_w/W$ ), on modifie ce seuil de stationnarité en l'abaissant, comme illustré sur la courbe de la figure 8.10b correspondant au cas  $W = 0.3L$ . Les lois empiriques de débit de vidange de silo ([Beverloo et coll. \[1961\]](#), [Janda et coll. \[2012\]](#)) ne donne pas de dépendance en ce paramètre sans dimension. Une étude plus approfondie serait intéressante pour comprendre plus finement la dépendance du débit en ce paramètre.

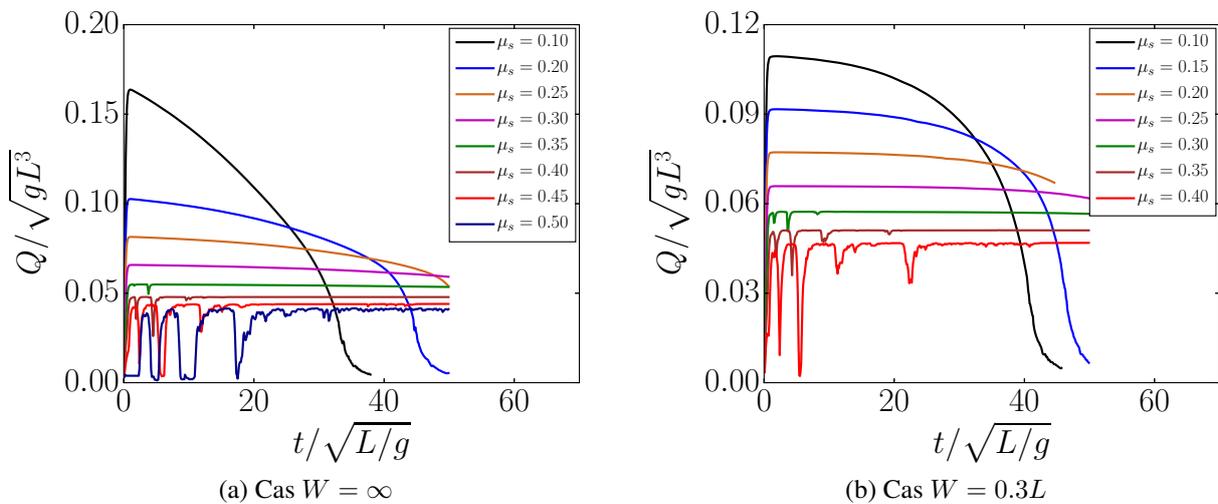


FIGURE 8.10 – Débit lors d'une vidange pour différentes valeurs de  $\mu_s$

## 8.1.6 Conclusions

Nous avons pu analyser plus en détail les effets de la prise en compte d'un frottement sur une paroi sur les champs internes à l'écoulement granulaire. Si cette analyse n'a pas permis d'identifier la raison qui faisait que la vitesse débitante était mise à l'échelle par  $\sqrt{gD}$ , plusieurs points ont pu être mis en évidence sur l'influence de  $W$  sur la vidange du silo :

- la pression granulaire dans la partie basse du silo (à une distance de l'ordre de  $D$ ) est mise à l'échelle par  $D$  lorsque  $D/W$  est suffisamment petit et par  $W$  lorsque  $D/W$  est suffisamment grand.
- cette variation de la pression en fonction de  $W$  à une distance  $D$  de l'orifice est sans impact sur la vitesse à la sortie du milieu granulaire qui ne dépend que de  $D$ . Ceci est cohérent avec les résultats obtenus notamment par [Perge et coll. \[2012\]](#) ou [Aguirre et coll. \[2011\]](#) qui ont montré que le débit de vidange est indépendant de la pression à la sortie.
- Le débit de vidange dépend du paramètre rhéologique  $\mu_s$

## 8.2 Analyse du cas avec le trou sur le côté

On reproduit ici une analyse assez similaire au cas précédent. On s'attend néanmoins à observer des tendances différentes au moins pour la vitesse.

### 8.2.1 Les champs

On a représenté sur la figure [8.11](#) les champs issus de simulations *Basifisk* de la vidange d'un silo avec un trou sur le côté. D'une manière très équivalente au cas avec le trou en bas du silo, le champ de pression montre dans la partie haute un report du poids des particules vers les parois, et une zone de faible pression partant de l'orifice et remontant vers l'intérieur du silo. La tendance en fonction de  $W$  est aussi similaire : lorsque  $W$  est faible, la zone de faible pression s'étend plus en amont dans le milieu granulaire et l'écoulement converge vers l'orifice depuis une élévation plus importante dans le silo. Ainsi, pour les faibles valeurs de  $W$  la zone morte est plus étendue.

### 8.2.2 Pression et frottement granulaire et pariétal

**Loi de l'orifice** D'une manière similaire au cas de l'orifice en bas, on peut effectuer des bilans de force en négligeant les termes inertiels et de gradient de pression granulaire. Pour la zone d'écoulement sur la largeur  $L$  du silo, représentée en rouge sur le schéma [8.12](#), l'écoulement étant principalement vertical, l'équation prédisant la pression granulaire reste la même que dans le cas d'un orifice inférieur (équation [8.10](#))

$$\frac{p^p(\lambda')}{\rho g L} = \frac{\gamma'_1}{1 + \gamma'_2 L/W}$$

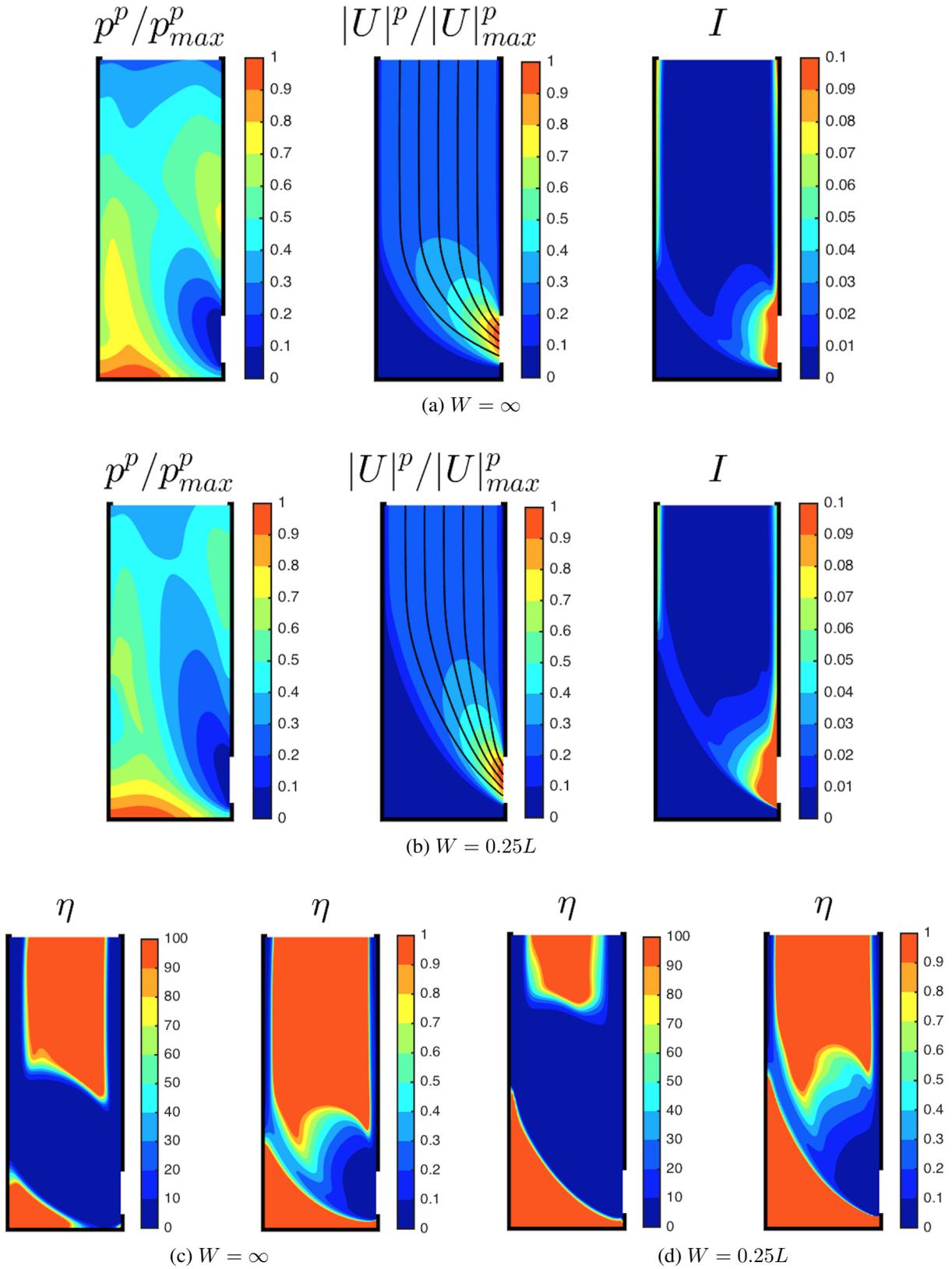


FIGURE 8.11 – Les mêmes champs instantanés ( $t/\sqrt{L/g} = 4$ ) que sur la figure 8.1 et 8.2 pour le cas d'un orifice latéral.



encore une fois très bon par rapport aux valeurs prises par la pression à une distance  $D$  de l'orifice en suivant une ligne de courant centrale. Ceci est illustré par les courbes de la figure 8.14. Il est intéressant de noter que les coefficients obtenus sont très proches de ceux correspondant à l'orifice inférieur. La pression granulaire n'est donc pas très sensible à la position de l'orifice.

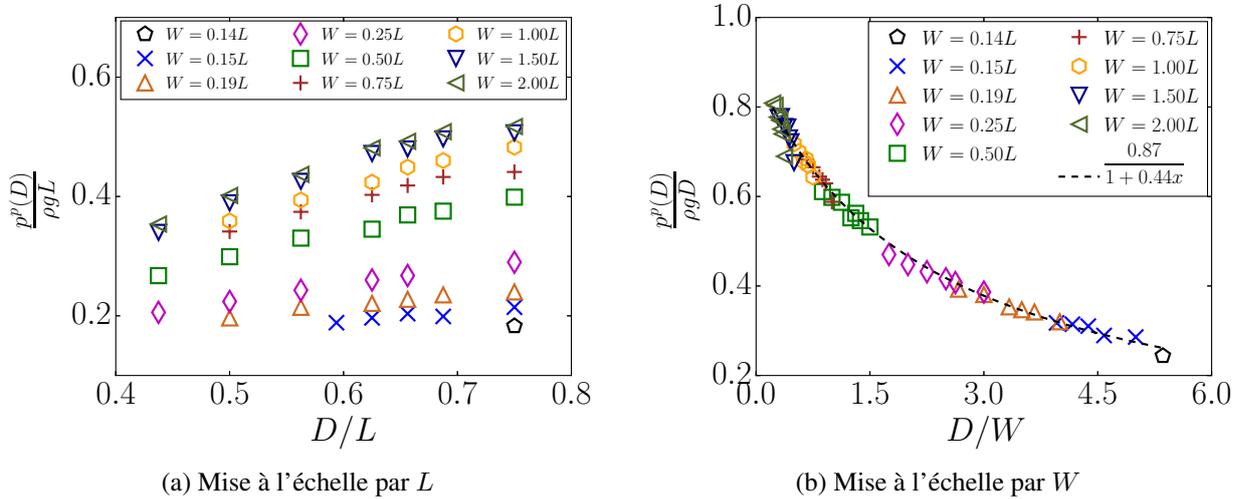


FIGURE 8.14 – La pression granulaire à une distance  $D$  de l'orifice

### 8.2.3 Vitesse et énergie cinétique

Comme nous l'avons vu au chapitre 5, si l'on trace la valeur de la norme de la vitesse au niveau de la sortie,  $U_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$  où  $u_0$  est la composante horizontale (donc participant au débit) et  $v_0$  la composante verticale, on observe clairement sur la figure 8.15a que la dépendance en  $W$  est négligeable et qu'on a  $U_0 \propto \sqrt{gD}$ . Ainsi, ce n'est pas la norme de la vitesse qui est influencée par  $W$  mais bien la seule vitesse débitante. Celle-ci peut s'exprimer en fonction de  $U_0$  et de l'angle d'inclinaison avec la verticale de l'écoulement en sortie ( $\theta \hat{=} \arctan(u_0/v_0)$ ) :

$$u_0 = \sin(\theta)U_0$$

Sur la figure 8.15b on retrouve une dépendance en  $W$  de  $\sin(\theta)$  selon

$$\sin(\theta) \sim \sqrt{\frac{\gamma_s}{1 + \gamma D/W}}$$

Ces résultats montrent que l'énergie cinétique ne dépend que de  $D$  quelle que soit la valeur de  $W$ . Mais dans le cas d'un orifice latéral, l'angle de la vitesse dépend fortement de  $W$ , ce qui fait que la vitesse débitante, et ainsi le débit, dépendent fortement de  $W$ . Alors que pour un orifice inférieur, l'angle de la zone morte dépend principalement de  $D$ . C'est pour cela que nous observons un régime différent de vidange pour un orifice latéral qui n'a jamais été observé dans le cas d'un

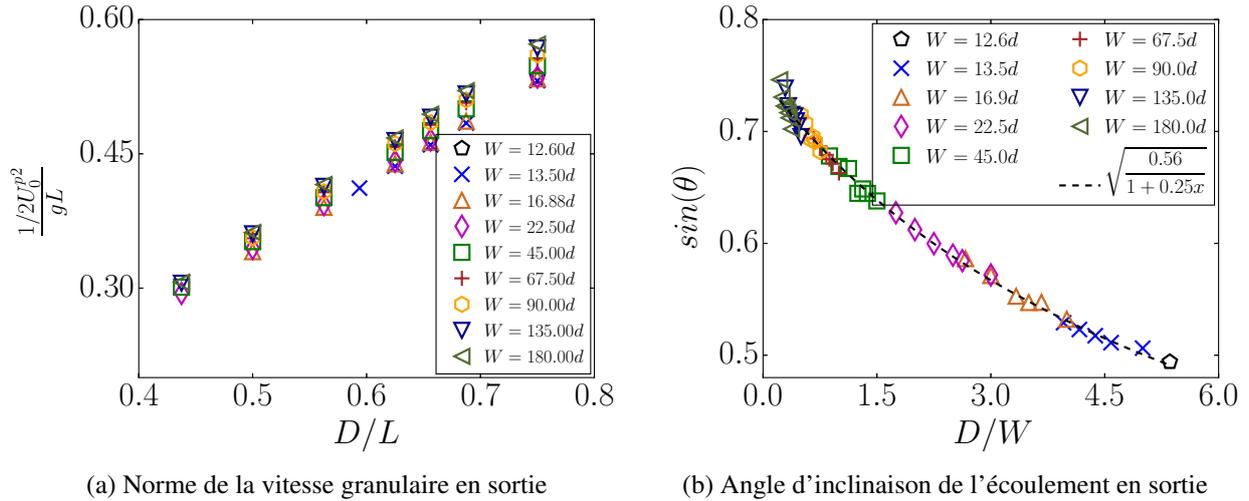


FIGURE 8.15 – Ecoulement en sortie

orifice inférieur. La modélisation de la zone morte semble nécessaire pour appréhender le débit de vidange du silo.

## 8.2.4 Conclusions

Dans le cas d'une vidange avec le trou sur le côté, on a pu établir les résultats suivants :

- les champs de pression et de vitesse subissent la même influence qualitative au sein du silo que pour le cas d'un trou en bas
- la pression proche de l'orifice (à une distance de l'ordre de la taille de l'orifice) dépend, comme pour le cas d'un trou en bas, fortement de  $D/W$
- la norme de la vitesse proche de l'orifice dépend uniquement de  $D$  et la dépendance du débit en fonction de  $D/W$  est portée par le fait que la vitesse forme un angle important avec la normale à l'orifice. En diminuant  $W$ , on rend les lignes de courant d'autant plus verticales sans changer la norme de la vitesse et le débit diminue. Ceci fait une différence importante avec le cas du trou en bas pour lequel diminuer  $W$  a aussi tendance à rendre les vitesses plus verticales vers la sortie (cette fois-ci leur direction est alignée avec la normale à l'orifice) sans que cela n'affecte le débit.

## 8.3 Conclusions

Le fait que la simulation numérique à l'aide du modèle rhéologique  $\mu(I)$  permette de retrouver les résultats expérimentaux de la vidange de silo sans écoulement d'air (dès lors que le nombre de grains dans l'orifice est suffisamment grand et qu'on peut raisonnablement faire l'hypothèse d'une

fraction volumique constante) a permis d'étudier plus en détail la structure de l'écoulement granulaire. En particulier, on a analysé de quelle manière l'introduction d'un frottement pariétal sur les faces avant et arrière d'un silo modifie les contraintes au sein du silo. De manière générale, dans la majeure partie du silo, les contraintes granulaires équilibrent le poids des grains et le reportent sur les parois. L'équilibre entre le poids et les contraintes granulaires augmentées du frottement pariétal détermine le niveau de pression granulaire au sein du silo. Ainsi, nous avons pu dans deux zones distinctes (loin de l'orifice, et proche de l'orifice) et sur la base d'un simple bilan de forces, prédire la dépendance de ce niveau de pression en fonction des grandeurs géométriques du silo (largeur  $L$  du silo, largeur  $D$  de l'orifice et profondeur  $W$  du silo et de l'orifice). Lorsque la part relative du frottement pariétal augmente (par rapport au frottement granulaire interne, c'est à dire lorsque la profondeur de notre silo diminue), la pression granulaire à une hauteur donnée diminue et l'écoulement commence à converger vers l'orifice depuis une hauteur plus importantes dans le silo. Les lignes de courant sont ainsi plus alignées avec le champ de la pesanteur. L'énergie cinétique du milieu granulaire proche de l'orifice est très peu sensible au frottement pariétal. Comme le débit est porté par l'écoulement vertical dans le cas d'un orifice en bas du silo, on ne retrouve donc pas d'influence forte de  $W$  sur le débit. Par contre, pour un orifice sur le côté du silo, l'orientation des lignes de courant influe rapidement sur le débit lorsque  $W$  décroît.



# Chapitre 9

## Conclusion et perspectives

Afin de modéliser la dynamique de l'éjection de gaz et de grains suite à la rupture d'un crayon combustible nous nous sommes intéressés au cas académique de la vidange d'un silo élançé verticalement contenant un milieu granulaire modèle constitué de billes sphériques de taille contrôlée, avec un orifice latéral en présence d'un écoulement.

Dans cet objectif, nous nous sommes d'abord intéressés à la vidange d'un silo ouvert (le haut de la colonne granulaire étant en équipression avec le milieu dans lequel s'effectue la vidange) avec un orifice inférieur pour différentes géométries (cylindrique et rectangulaire). Nous avons fait varier les dimensions géométriques du silo et la taille des particules. Cette étude dans cette configuration de référence nous a permis de valider les 3 approches développées : l'expérience, la simulation continue, et la simulation discrète. Dans l'étude expérimentale, nous retrouvons les résultats de la littérature et nous avons montré que la loi de [Janda \*et coll.\* \[2012\]](#) prédit bien le débit de vidange. Cette loi repose encore sur plusieurs paramètres empiriques, conformément à la compréhension actuelle de la phénoménologie de la vidange. Comme prédit par cette loi, le débit montre une forte dépendance avec la taille de l'orifice et une dépendance plus faible avec la taille des particules qui est liée à la dilatation des particules à la sortie lors de la vidange. Grâce à la simulation discrète de la vidange d'un milieu bidisperse nous avons également montré que le milieu peut être considéré comme continu car les vitesses des particules à une position donnée sont les mêmes quelle que soit leur taille. Nous avons validé numériquement les hypothèses du modèle proposés par [Benyamine \*et coll.\* \[2014\]](#), permettant de prédire le débit de vidange d'un tel milieu en supposant qu'il est continu et que chaque phase est représentée par sa fraction volumique. Enfin nous avons bien retrouvé le fait qu'une modélisation continue viscoplastique frictionnelle  $\mu(I)$  permet de prédire la loi de vidange d'un silo, pour des grands rapports  $D/d$  dans la continuité de [Staron \*et coll.\* \[2012, 2014\]](#). Nous n'avons pas observé d'influence de l'épaisseur du silo sur la vitesse débitante dans cette configuration.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la vidange d'un silo toujours ouvert mais possédant un orifice latéral. En effet, cette orientation particulière de l'orifice correspond aux observations du faciès d'un crayon combustible ayant rompu lors d'essais simulant des conditions

accidentelles. La littérature nous a fourni peu d'informations sur la vidange dans cette configuration. Comme précédemment, nous avons mené cette étude avec les trois approches : l'expérience, la simulation continue, et la simulation discrète. Nous avons étudié systématiquement la vidange du silo dans les configurations rectangulaire et cylindrique possédant un orifice latéral, en variant trois paramètres : la hauteur de l'orifice  $D$ , l'épaisseur du silo, et en l'occurrence la largeur de l'orifice  $W$  et la taille de particules  $d$ . Nous avons mis en évidence deux régimes d'écoulements, suivant les valeurs du rapport d'aspect de l'orifice  $D/W$ . Le premier régime, observé pour des faibles rapports d'aspect, correspond au régime Hagen-Beverloo avec un débit  $Q \propto WD^{3/2}$ . Le deuxième régime, observé pour des grands rapports d'aspect,  $D/W > \mathcal{A}_c$ , suit la loi  $Q \propto W^{3/2}D$ . La simulation continue avec la rhéologie frictionnelle  $\mu(I)$  et résolue en 2D en ajoutant un terme source pour prendre en compte la friction sur les parois reproduit ces deux régimes et la plupart des détails internes à l'écoulement observés expérimentalement dans le silo rectangulaire. Ce résultat suggère que le deuxième régime est contrôlé par la friction sur les parois latérales. En présence de la friction latérale, le champ de vitesse tend à s'aligner sur la gravité d'autant plus que  $W$  est petit. La norme de la vitesse ne dépend que de la hauteur de l'orifice  $\approx \sqrt{gD}$ . L'angle d'inclinaison de la vitesse par rapport à la verticale dépendant du rapport  $D/W$ , explique la plupart des observations et notamment la variation de la vitesse débitante. Finalement, en utilisant la simulation discrète, nous avons montré que pour prendre en compte la dépendance du débit avec la taille des particules, il faut considérer la dilatation des particules à l'orifice à travers une fonction géométrique. Pour décrire les résultats expérimentaux, nous avons proposé d'appliquer cette fonction selon les deux dimensions de l'ouverture. À partir de ces observations, nous avons proposé une loi empirique qui prédit le débit quelles que soient les dimensions de l'ouverture et la taille des billes.

La troisième étude a concerné la vidange d'un silo bouché en son sommet et au sein duquel on injecte un débit d'air constant, l'orifice étant placé à sa base. Nous avons montré que le débit des particules dépend fortement du débit d'air imposé. Grâce à des mesures de pression, nous avons montré que l'écoulement de l'air est bien décrit par la loi d'Ergun et que le milieu granulaire se dilate à l'orifice de façon similaire au cas d'un silo ouvert. Nous avons alors modélisé analytiquement l'effet de l'écoulement du gaz sur le débit de vidange. Pour cela, nous avons considéré une extension de la loi de vidange obtenue dans le cas ouvert : le terme moteur qui se réduit à la gravité dans ce dernier cas, est augmenté de la force volumique de frottement entre les particules et le gaz. La simulation numérique continue nous a conforté dans la validité de ce modèle. Néanmoins cette simulation est faite dans le régime de Darcy et en supposant la fraction volumique du milieu granulaire constante et uniforme.

Enfin, nous avons combiné les deux effets étudiés (effet de la position de l'orifice et de l'injection d'air) et nous sommes rapprochés de la configuration d'intérêt : la vidange d'un silo élancé, assistée par une injection d'air, et avec un orifice latéral. Les résultats obtenus sont très similaires à ceux du silo avec orifice inférieur. Nous avons adapté le modèle développé dans le cas du silo inférieur en considérant que dans cette géométrie où la section de l'orifice est orthogonale à la

gravité, seulement une partie de la gravité  $\kappa g$  est moteur de l'écoulement en sortie. Les résultats des simulations numériques continues semblent conforter ce modèle.

Ainsi, cette étude a apporté les bases d'une modélisation de la vidange d'un silo élancé, ouvert sur son côté, et au sein duquel un gaz s'écoule. Nous avons en effet établi la dépendance de ce débit de vidange en fonction de la géométrie de l'orifice, du frottement du milieu granulaire sur les parois verticales et avec le gaz et du nombre de particules au travers de l'orifice. Enfin cette étude a permis d'approfondir la compréhension des capacités d'un modèle continu à simuler de tels écoulements : cette approche, qui permet de s'abstenir de décrire les échelles de l'ordre de la taille du grain, a permis de reproduire les principaux phénomènes caractérisés par nos études expérimentales. Malgré certaines limites identifiées, cette approche est très prometteuse.

Néanmoins de nombreuses questions restent encore ouvertes suite à ce travail. En effet dans le cas de la vidange d'un silo ouvert, nous avons proposé des lois empiriques qui décrivent correctement le débit de vidange. Toutefois la compréhension des mécanismes physiques conduisant à ces lois empiriques reste limitée. Afin de progresser dans cette compréhension, on peut imaginer plusieurs pistes de travail.

- La résolution numérique à l'aide du logiciel *Basilisk* du modèle rhéologique viscoplastique avec une fraction volumique constante au sein du milieu granulaire permet de retrouver l'évolution correcte phénoménologiquement du débit d'un silo d'ouverture  $D \times W$  et ce pour les deux positions (inférieure ou latérale) de cette ouverture. Ces simulations nous donnent accès aux champs de vitesse et de contrainte internes au silo. Une première perspective serait d'analyser plus finement à l'aide de cet outil les différentes contributions à la dynamique de vidange du silo. Notamment il serait intéressant de comprendre le rôle que jouent les paramètres de la loi viscoplastique, et notamment  $\mu_s$ , dans la vidange.

- Toujours du point de vue numérique, il serait intéressant d'implémenter la rhéologie  $\phi(I)$ , afin de voir si cette rhéologie locale permet de reproduire également l'effet de dilatation à l'orifice. Il serait également intéressant de mener cette étude en 3D afin de valider les hypothèses du modèle empirique. Néanmoins une étude approfondie des conditions aux limites représentant le frottement d'un milieu granulaire dense avec une paroi semble un préalable important à ce travail. Sur ce point, des développements théoriques étayés par des études expérimentales et/ou des simulations discrètes sont encore nécessaires. Les résultats obtenus pourraient être confrontés à des simulations discrètes 3D afin de les valider.

- Afin de mieux comprendre la dynamique de vidange de silo, on pourrait étudier une configuration géométrique différente, et notamment limitant les zones dites mortes où le milieu granulaire est statique. En effet, la description de cette zone correspond à une limite inhérente à la

rhéologie viscoplastique retenue et il est nécessaire à ce jour d'avoir recours à une régularisation numérique de cette rhéologie. Or l'étendue spatiale de cette zone détermine la convergence de l'écoulement interne au silo qui joue un rôle important dans la vidange par un orifice latéral. On pourrait par exemple considérer l'écoulement en sortie latérale d'un silo ayant pour fond un plan incliné avec un angle imposé, soit l'équivalent d'une trémie pour les orifices inférieurs. En forçant ainsi l'orientation de l'écoulement, on pourrait améliorer la compréhension de la variation de la vitesse débitante en fonction de l'écoulement interne et l'influence relative du frottement sur les parois pour le cas des silos étroits.

- Le rôle des paramètres de la loi rhéologique viscoplastique sur le débit de vidange a été insuffisamment étudié. Or, nous avons constaté par le biais des simulations numériques, qu'ils impactent la stationnarité de l'écoulement ainsi que son intensité. L'intensité du débit de vidange est à ce jour toujours prédite par des coefficients empiriques non reliés aux paramètres intrinsèques du milieu granulaire. On pourrait à ce titre considérer des variations expérimentales du coefficient de friction  $\mu_s$  en variant la rugosité des particules. Il serait également intéressant d'effectuer des mesures précises de vitesses et de fraction volumique à la sortie.

- Lors des expériences avec le silo rectangulaire, nous avons constaté que le profil de l'interface supérieure de la colonne granulaire s'incline au début de la vidange dans le cas des petites épaisseurs  $W$  (voir la figure 10 dans l'article sur l'influence de l'épaisseur du silo). On peut ainsi observer des avalanches sur cette interface qui sont similaires à celles observées dans des expériences de tambour tournant ([Hung et coll. \[2016\]](#)). Ce type d'écoulement granulaire en surface se prête à des modélisations simplifiées de la dynamique basées sur une intégration dans l'épaisseur de l'écoulement, [Capart et coll. \[2015\]](#). Notre observation expérimentale a ainsi motivé une collaboration en cours avec Hervé Capart et Chi-Yao Hung, de l'Université Nationale de Taiwan. Nous avons ainsi effectué des expériences dans le régime  $D/W \gg 1$  afin d'étudier spécifiquement l'avalanche à l'interface supérieure du granulaire.

- En présence d'air injecté, un travail intéressant à faire à l'aide de l'outil de simulation d'un modèle continu, est d'analyser plus finement les différentes contributions à la dynamique du milieu granulaire. Il sera intéressant d'étudier le rôle joué par la pression fluide et de voir si le résultat est compatible avec le modèle proposé.

- La simulation numérique discrète est un outil coûteux mais précieux pour améliorer la compréhension fine des écoulements granulaires. De récents développements d'outils numériques, permettent de résoudre l'écoulement d'un fluide à l'échelle des pores entre les grains. Il serait intéressant de compléter l'étude de nos configurations de vidange à l'aide de telles simulations numériques.

- Enfin, la situation étudiée est assez académique et s'écarte par de nombreux aspects de la configuration ayant motivé cette étude. Une poursuite des travaux sur cette problématique serait notamment d'analyser des cas pour lesquels l'écoulement gazeux est piloté par un différentiel de pression entre le sommet de la colonne et le milieu extérieur, ce dernier étant liquide. L'étude de milieux granulaires plus complexes (notamment de par la forme et la dispersion en taille des grains) constitue également un intérêt particulier.



# Annexe A

## Validation des simplifications des équations à deux phases

Afin de construire le modèle simple, nous avons négligé l'accélération du fluide ainsi que la contrainte visqueuse. Nous allons justifier ces simplifications par un calcul d'ordre de grandeur.

### A.1 Accélération du fluide

Une des hypothèses principales de notre analyse a été de négliger le terme inertiel dans le bilan de quantité de mouvement fluide devant le tenseur des contraintes (gradient de pression et traînée s'équilibrant). Or, du fait de la géométrie du silo, on sait que ces termes sont non nuls, notamment à proximité de l'orifice où la section de passage fluide se réduit. Puisque nous avons travaillé sur la direction  $z$  avec l'équation 6.8, nous comparons les deux termes suivants proche de la sortie :

$$(i) \quad \rho_f(1 - \phi)\left(u_x^f \frac{\partial u_z^f}{\partial x} + u_z^f \frac{\partial u_z^f}{\partial z}\right)$$
$$(ii) \quad \beta_i \rho_f d(1 - \phi)(U_z - u_z^p)^2 \quad \text{avec} \quad \beta_i = 1.75 \frac{\phi}{(1 - \phi)^3 d^2}$$

Près de la sortie, les vitesses verticales changent puisqu'il y a un changement de la surface de  $S_b$  à  $S_o$ ,  $u_z^f$  varie donc de  $Q_{air}/(1 - \phi)S_b$  à  $Q_{air}/(1 - \phi)S_o$  sur une longueur caractéristique d'ordre  $D$ . Ainsi

$$u_z^f \frac{\partial u_z^f}{\partial z} \sim \left( \frac{Q_{air}}{(1 - \phi)S_o} \right) \left( \frac{Q_{air}/S_o - Q_{air}/S_b}{(1 - \phi)D} \right) \sim \frac{Q_{air}^2}{(1 - \phi)^2 S_o^2 D}$$

La variation de la vitesse horizontale dans la direction horizontale se fait sur une distance d'ordre  $D$  pour passer d'une valeur nulle à une valeur  $u_{xmax}^f$ . Ainsi, en utilisant l'équation de continuité, il vient que  $u_{xmax}^f \sim u_{zmax}^f \sim Q_{air}/(1 - \phi)S_o$ . La vitesse verticale étant nulle au bord, on peut estimer que

$$u_x^f \frac{\partial u_z^f}{\partial x} \sim u_{xmax}^f \frac{u_{zmax}^f}{D} \sim \frac{Q_{air}^2}{(1 - \phi)^2 S_o^2 D}$$

Le premier terme est finalement d'ordre

$$(i) \quad \rho_f(1 - \phi)(u_x^f \frac{\partial u_z^f}{\partial x} + u_z^f \frac{\partial u_x^f}{\partial z}) \sim \rho_f \frac{Q_{air}^2}{(1 - \phi)S_o^2 D}$$

Afin d'évaluer le deuxième terme, nous nous plaçons dans le cas où l'inertie joue un rôle et on peut supposer que dans ce régime la vitesse de glissement entre les deux phases est importante et  $u^p \ll U \sim Q_{air}/S_o$ . Le deuxième terme est donc d'ordre :

$$(ii) \quad \beta_i \rho_f d(1 - \phi)(U_z - u_z^p)^2 \sim \frac{\phi}{(1 - \phi)} \rho_f \frac{Q_{air}^2}{(1 - \phi)S_o^2 d}$$

Nous pouvons voir que l'accélération du fluide est négligeable devant la force volumique de trainée dès lors que la taille de l'orifice est grande devant la taille des particules. Cette condition est toujours réalisée car pour être au dessus du blocage nous avons en général  $D > 10d$ .

## A.2 Contrainte visqueuse

Nous avons également choisi de négliger la contrainte visqueuse par rapport à la pression dans le bilan de quantité de mouvement fluide. Suivant [Ouriemi et coll. \[2009\]](#) nous supposons que  $\tau_{ij}^f = \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$ . Pour évaluer ce terme nous allons nous placer comme précédemment au niveau de l'orifice où le cisaillement est maximum et le comparer au terme visqueux de la force de trainée. Avec les mêmes hypothèses, nous obtenons les ordres de grandeur suivant :

$$(iii) \quad \eta(1 - \phi) \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \sim \eta(1 - \phi) \frac{Q_{air}}{S_o D^2}$$

$$(iv) \quad \eta \beta_i(1 - \phi)(U_z - u_z^p) \sim \eta 150 \frac{\phi^2}{(1 - \phi)^2} \frac{Q_{air}}{S_o d^2}$$

Le terme de contrainte visqueuse est donc négligeable devant celui de la trainée dès lors que  $D/d \gg \sqrt{(1 - \phi)^3 / (150\phi^2)}$ , ce qui est toujours réalisé.

Les simplifications effectuées dans les équations à deux phases sont donc justifiées.

# Bibliographie

- AGUIRRE, M. A., GRANDE, J. G., CALVO, A., PUGNALONI, L. A. et GÉMINARD, J.-C. (2011). Granular flow through an aperture : Pressure and flow rate are independent. *Phys. Rev. E*, 83:061305.
- ALTENKIRCH, R. A. et EICHHORN, R. (1981). Effect of fluid drag on low Reynolds number discharge of solids from a circular orifice. *AIChE J.*, 27:593.
- AMARSID, L. (2015). *Rhéologie des écoulements granulaires immergés dans un fluide visqueux*. Thèse de doctorat, Université de Montpellier.
- ANDRÉOTTI, B., FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2011). *Les milieux granulaires : entre fluide et solide*. EDP sciences.
- ARTEAGA, P. et TÜZÜN, U. (1990). Flow of binary mixtures of equal-density granules in hoppers - size segregation, flowing density and discharge rates. *Chem. Eng. Sci.*, 45(1):205–223.
- AUSSILLOUS, P., CHAUCHAT, J., PAILHA, M., MÉDALE, M. et GUAZZELLI, E. (2013). Investigation of the mobile granular layer in bedload transport by laminar shearing flows. *J. Fluid Mech.*, 736:594–615.
- BARKER, T., SCHAEFFER, D. G., BOHORQUEZ, P. et GRAY, J. M. N. T. (2015). Well-posed and ill-posed behaviour of the  $\mu(I)$ -rheology for granular flow. *J. Fluid Mech.*, 779:794–818.
- BARLETTA, D., DONSI, G., FERRARI, G. et POLETTO, M. (2003). On the role and the origin of the gas pressure gradient in the discharge of fine solids from hoppers. *Chem. Eng. Sci.*, 58(23–24):5269 – 5278.
- BENYAMINE, M., DJERMANE, M., DALLOZ-DUBRUJEAUD, B. et AUSSILLOUS, P. (2014). Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo. *Phys. Rev. E*, 90:032201.
- BERTHO, Y., GIORGIUTTI-DAUPHINÉ, F. et HULIN, J.-P. (2003). Dynamical Janssen effect on granular packing with moving walls. *Phys. Rev. Lett.*, 90:144301.
- BEVERLOO, W. A., LENIGER, H. A. et de VELDE, J. V. (1961). The flow of granular solids through orifices. *Chem. Eng. Sci.*, 15:260–269.

- BOUCHUT, F., FERNÁNDEZ-NIETO, E. D., MANGENEY, A. et NARBONA-REINA, G. (2016). A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects. *J. Fluid Mech.*, 801:166221.
- BOUZID, M., TRULSSON, M., CLAUDIN, P. et ANDREOTTI, B. (2013). Non-local rheology for granular flows across yield conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 111:238301.
- BOYER, F., GUAZZELLI, E. et POULIQUEN, O. (2011). Unifying suspension and granular rheology. *Phys. Rev. Lett.*, 107(18):188301.
- BROWN, R. L. et RICHARDS, J. C. (1970). *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon Press, Oxford.
- CAPART, H., HUNG, C.-Y. et STARK, C. P. (2015). Depth-integrated equations for entraining granular flows in narrow channels. *J. Fluid Mech.*, 765:R4 (12 pages).
- CASSAR, C., NICOLAS, M. et POULIQUEN, O. (2005). Submarine granular flows down inclined planes. *Physics of Fluids*, 17(10):103301.
- CHANG, C. S., CONVERSE, H. H. et STEELE, J. L. (1991). Flow rates of grain through various shapes of vertical and horizontal orifices. *Trans. Am. Soc. Agr. Eng.*, 34(1789).
- CHAUCHAT, J. et MÉDALE, M. (2010). A three-dimensional numerical model for incompressible two-phase flow of a granular bed submitted to a laminar shearing flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(9–12):439 – 449.
- CHAUCHAT, J. et MÉDALE, M. (2014). A three-dimensional numerical model for dense granular flows based on the rheology. *Journal of Computational Physics*, 256:696 – 712.
- COURRECH DU PONT, S., GONDRET, P., PERRIN, B. et RABAUD, M. (2003). Granular avalanches in fluids. *Phys. Rev. Lett.*, 90:044301.
- CREWDSON, B. J., ORMOND, A. L. et NEDDERMAN, R. M. (1977). Air-impeded discharge of fine particles from a hopper. *Powder Technol.*, 16(2):197 – 207.
- CUNDALL, P. A. et STRACK, O. D. L. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65.
- da CRUZ, F., EMAM, S., PROCHNOW, M., ROUX, J.-N. et CHEVOIR, F. (2005). Rheophysics of dense granular materials : Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E*, 72:021309.
- DALLOZ-DUBRUJEAUD, B., FAURE, R., TADRIST, L. et GIRAUD, G. (2000). Perte de pression et vitesse minimum de fluidisation dans un lit de particules 2D. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 328:231–236.

- DAVIER, G. et BERTAILS-DESCOUBES, F. (2016). Nonsmooth simulation of dense granular flows with pressure-dependent yield stress. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 234:15–35.
- DE JONG, J. (1969). Vertical air-controlled particle flow from a bunker through circular orifices. *Powder Technol.*, 3(1):279 – 286.
- DE JONG, J. et HOELEN, Q. E. J. J. M. (1975). Cocurrent gas and particle flow during pneumatic discharge from a bunker through an orifice. *Powder Technol.*, 12(3):201 – 208.
- DUBOIS, F. et JEAN, M. (2006). The non smooth contact dynamic method : recent LMGC90 software developments and application. *In Analysis and simulation of contact problems*, pages 375–378. Springer Berlin Heidelberg.
- DUBOIS, F., JEAN, M., RENOUF, M., MOZUL, R., MARTIN, A. et BAGNERIS, M. (2011). LMGC90. *10e Colloque National en Calcul des Structures*.
- DUNATUNGA, S. et KAMRIN, K. (2015). Continuum modelling and simulation of granular flows through their many phases. *Journal of Fluid Mechanics*, 779:483– 513.
- ERGUN, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress*, 48(2): 89–94.
- FEDE, P., SIMONIN, O. et INGRAM, A. (2016). 3D numerical simulation of a lab-scale pressurized dense fluidized bed focussing on the effect of the particle-particle restitution coefficient and particle-wall boundary conditions. *Chemical Engineering Science*, 142:215–235.
- FORTERRE, Y. (2006). Kapiza waves as a test for three-dimensional granular flow rheology. *J. Fluid Mech.*, 563:123–132.
- FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2003). Long-surface-wave instability in dense granular flows. *J. Fluid Mech.*, 486:21–50.
- FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2008). Flows of dense granular media. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40:1–24.
- FUKETA, T., SASAJIMA, H., MORI, Y. et ISHIJIMA, K. (1997). Fuel failure and fission gas release in high burnup pwr fuels under ria conditions. *J. Nucl. Mat.*, 248:249–256.
- HAGEN, G. (1852). Über den Druck und die Bewegung des trocknen Sandes. *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 35–42.
- HASSANIZADEH, S. M. et GRAY, W. G. (1987). High velocity flow in porous media. *Transport in Porous Media*, 2(6):521–531.

- HILTON, J. E. et CLEARLY, P. W. (2011). Granular flow during hopper discharge. *Phys. Rev. E*, 84:011307.
- HIRSHFELD, D. et RAPAPORT, D. (2001). Granular flow from a silo : Discrete-particle simulations in three dimensions. *Eur. Phys. J. E*, 4:193–199.
- HSIAU, S.-S., HSU, C.-C. et SMID, J. (2010). The discharge of fine silica sands in a silo. *Phys. Fluids*, 22:043306.
- HUMBY, S., TÜZÜN, U. et YU, A. B. (1998). Prediction of hopper discharge rates of binary granular mixtures. *Chem. Eng. Sci.*, 53(3):483–494.
- HUNG, C.-Y., STARK, C. P. et CAPART, H. (2016). Granular flow regimes in rotating drums from depth-integrated theory. *Phys. Rev. E*, 93:030902.
- ISHIKAWA, M. et SHIOZAWA, S. (1980). A study of fuel behavior under reactivity initiated accident conditions - review. *J. Nucl. Mat.*, 95:1–30.
- JACKSON, R. (2000). *The dynamics of fluidized particles*. Cambridge University Press.
- JAEGER, H., NAGEL, S. et BEHRINGER, R. (1996). Granular solids, liquids, and gases. *Rev. Mod. Phys.*, 68(4):1259–1273.
- JANDA, A., MAZA, D., GARCIMARTIN, A., KOLB, E., LANUZA, J. et CLÉMENT, E. (2009). Unjamming a granular hopper by vibration. *Eur. Phys. Lett.*, 87:24002.
- JANDA, A., ZURIGUEL, I. et MAZA, D. (2012). Flow rate of particles through apertures obtained from self-similar density and velocity profiles. *Phys. Rev. Lett.*, 108:248001.
- JEAN, M. (1999). The non-smooth contact dynamics method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 177:235–257.
- JEAN, M. et MOREAU, J. (1992). Unilaterality and dry friction in the dynamics of rigid body collections. *Proc. of Contact Mech. Int. Symp.*, pages 31–48.
- JONG, J. A. H. D. (1969). Vertical air-controlled particle flow from a bunker through circular orifices. *Powder Technol.*, 3:279–286.
- JONG, J. A. H. D. et HOELEN, Q. E. J. J. M. (1975). Cocurrent gas and particle flow during pneumatic discharge from a bunker through orifice. *Powder Technol.*, 12:201–208.
- JOP, P., FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2005). Crucial role of sidewalls in granular surface flows : consequences for the rheology. *J. Fluid Mech.*, 541:167–192.
- JOP, P., FORTERRE, Y. et POULIQUEN, O. (2006). A constitutive law for dense granular flows. *Nature*, 441:727–730.

- KAMRIN, K. (2010). Nonlinear elasto-plastic model for dense granular flow. *Int. J. Plast.*, 26:167–188.
- LACAZE, L. et KERSWELL, R. R. (2009). Axisymmetric granular collapse : A transient 3D flow test of viscoplasticity. *Phys. Rev. Lett.*, 102:108305.
- LAGRÉE, P.-Y. (2007). Interactive boundary layer in a Hele Shaw cell. *Z. Angew. Math. Mech.*, 87(7):489–498.
- LAGRÉE, P.-Y., STARON, L. et POPINET, S. (2011). The granular column collapse as a continuum : validity of a two-dimensional navier–stokes model with a  $\mu(I)$ -rheology. *J. Fluid Mech.*, 686:378–408.
- MANKOC, C., GARCIMARTÍN, A., ZURIGUEL, I., MAZA, D. et PUGNALONI, L. A. (2009). Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo. *Phys. Rev. E*, 80:011309.
- MANKOC, C., JANDA, A., ARÉVALO, A., PASTOR, J. M., ZURIGUEL, I., GARCIMARTÍN, A. et MAZA, D. (2007). The flow rate of granular materials through an orifice. *Granul. Matter*, 9:407–414.
- MEDINA, A., CABRERA, D., LÓPEZ-VILLA, A. et PLIEGO, M. (2014). Discharge rates of dry granular material from bins with lateral exit holes. *Powder Technology*, 253:270–275.
- MEFFEJA, M. F. D. (2012). *Simulation et modélisation de milieux granulaires confinés*. Thèse de doctorat, L'Université de Rennes 1.
- MEUNIER, P. et LEWEKE, T. (2003). Analysis and treatment of errors due to high velocity gradients in particle image velocimetry. *Experiments in fluids*, 35(5):408–421.
- MIDI, G. (2004). On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14:341–365.
- NEDDERMAN, R., TŪZŪN, U. et THORPE, R. (1983a). The effect of interstitial air pressure gradients on the discharge from bins. *Powder Technology*, 35(1):69 – 81.
- NEDDERMAN, R., TŪZŪN, U. et THORPE, R. (1983b). The effect of interstitial air pressure gradients on the discharge from bins. *Powder Technol.*, 35:69 – 81.
- NEDDERMAN, R. M. (1992). *Statics and kinematics of granular materials*. Cambridge University Press.
- NEDDERMAN, R. M., TŪZŪN, U., SAVAGE, S. B. et HOULSBY, G. T. (1982). The flow of granular materials-I. *Chem. Eng. Sci.*, 11:1597–1609.
- NIELD, D. A. et BEJAN, A. (2006). *Convection in Porous Media*. Springer.

- OURIEMI, M., AUSSILLOUS, P. et GUAZZELLI, E. (2009). Sediment dynamics. Part 1. Bed-load transport by laminar shearing flows. *J. Fluid Mech.*, 636:2955–319.
- OVARLEZ, G., C.FOND et CLÉMENT, E. (2003). Overshoot effect in the Janssen granular column : A crucial test for granular mechanics. *Phys. Rev. E*, 67:060302.
- PAILHA, M. et POULIQUEN, O. (2009). A two-phase flow description of the initiation of underwater granular avalanches. *J. Fluid Mech.*, 633:115–135.
- PEIRANO, E., DELLOUME, V., JOHNSON, F., LECKNER, B. et SIMONIN, O. (2002). Numerical simulation of the fluid dynamics of a freely bubbling fluidized bed : influence of the air supply system. *Powder Technol.*, 122(1):69 – 82.
- PENNEC, T. L., MÅLØY, K. J., HANSEN, A. et AMMI, M. (1996). Ticking hour glasses : Experimental analysis of intermittent flow. *Phys. Rev. E*, 53:2257–2264.
- PERCIER, B. (2013). *Dynamique d'un empilement granulaire : instabilité de tôle ondulée et fluage d'une colonne de grains*. Thesis, Université Lyon I – ENS de Lyon.
- PERGE, C., AGUIRRE, M. A., GAGO, P. A., PUGNALONI, L. A., TOURNEAU, D. L. et GÉMINARD, J.-C. (2012). Evolution of pressure profiles during the discharge of a silo. *Phys. Rev. E*, 85: 021303.
- PITMAN, E. B. et LE, L. (2005). A two-fluid model for avalanche and debris flows. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 363:1573–1601.
- POPINET, S. (2015). A quadtree-adaptive multigrid solver for the Serre–Green–Naghdi equations. *J. Comput. Phys.*, 302:336–358.
- POULIQUEN, O. et FORTERRE, Y. (2002). Friction law for dense granular flows : application to the motion of a mass down a rough inclined plane. *J. Fluid Mech.*, 453:133–151.
- POULIQUEN, O. et FORTERRE, Y. (2009). A non-local rheology for dense granular flows. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 367:5091–5107.
- RADJAI, F. et DUBOIS, F. (2011). *Discrete-element modeling of granular materials*. Wiley-Iste.
- RADJAI, F. et RICHEFEU, V. (2009). Contact dynamics as a nonsmooth discrete element method. *Mechanics of Materials*, 41:715–728.
- RESNICK, W., HELED, Y., KLEIN, A. et PALM, E. (1966). Effect of differential pressure on flow of granular solids through orifices. *Ind. Eng. Chem. (Fundam.)*, 5(3):392.
- REVIL-BAUDARD, T. et CHAUCHAT, J. (2013). A two-phase model for sheet flow regime based on dense granular flow rheology. *Journal of Geophysical Research*, 118:619 619 – 634.

- RONDON, L. (2011). *Effondrement granulaire : Couplages fluide-grains*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille University.
- RUBIO-LARGO, S., JANDA, A., MAZA, D., ZURIGUEL, I. et HIDALGO, R. (2015). Disentangling the free-fall arch paradox in silo discharge. *Phys. Rev. Lett.*, 114:238002.
- RUYER, P. (2012). Interaction combustible réfrigérant suite à une rupture de gaine lors d'un accident d'insertion de réactivité. État de l'art des connaissances. Rapport technique PSN/SEMIA/2012-00394, IRSN.
- RYCROFT, C. H., BAZANT, M. Z., GREY, G. S. et LANDRY, J. W. (2006). Dynamics of random packings in granular flow. *Phys. Rev. E*, 73:051306.
- SERRANO, D., MEDINA, A., CHAVARRIA, G. R., PLIEGO, M. et KLAPP, J. (2015). Mass flow rate of granular material flowing from tilted bins. *Powder Technology*, 286:438–443.
- SHELDON, H. G. et DURIAN, D. J. (2010). Granular discharge and clogging for tilted hoppers. *Granular Matter*, 12(6):579–585.
- SIMONIN, O., CHEVRIER, S., AUDARD, F. et FEDE, P., éditeurs (2016). *Drag force modelling in dilute to dense particle-laden flows with mono-disperse or binary mixture of solid particles*. 9th International Conference on Multiphase Flow.
- SPERL, M. (2006). Experiments on corn pressure in silo cells. Translation and comment of Jansen's paper from 1895. *Granul. Matter*, 8(2):59–65.
- STARON, L., LAGRÉE, P.-Y. et POPINET, S. (2012). The granular silo as a continuum plastic flow : The hour-glass vs the clepsydra. *Phys. Fluids*, 24:103301.
- STARON, L., LAGRÉE, P.-Y. et POPINET, S. (2014). Continuum simulation of the discharge of the granular silo. *The European Physical Journal E*, 37(1):1–12.
- TIGHE, B. et SPERL, M. (2007). Pressure and motion of dry sand : translation of Hagen's paper from 1852. *Granul. Matter*, 9:141 – 144.
- TO, K., LAI, P.-Y. et PAK, H. (2001). Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper. *Phys. Rev. Lett.*, 86:71.
- TÜZÜN, U., HOULSBY, G. T., NEDDERMAN, R. M. et SAVAGE, S. B. (1982). Flow of granular materials - 2. Velocity distributions in slow flow. *Chem. Eng. Sci.*, 37(12):1691–1709.
- VANEL, L., CLAUDIN, P., BOUCHAUD, J.-P., CATES, M. E., CLÉMENT, E. et WITTMER, J. P. (2000). Stresses in silos : Comparison between theoretical models and new experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 84:1439–1442.

- ZHOU, Y., RUYER, P. et AUSSILLOUS, P. (2015). Discharge flow of a bidisperse granular media from a silo : discrete particle simulations. *Phys. Rev. E*, 92:062204.
- ZURIGUEL, I., GARCIMARTÍN, A., MAZA, D., PUGNALONI, L. A. et PASTOR, J. M. (2005). Jamming during the discharge of granular matter from a silo. *Phys. Rev. E*, 71:051303.

**Résumé** - En condition accidentelle, et plus particulièrement suite à une insertion de réactivité, le combustible nucléaire d'un réacteur, initialement confiné par un gainage cylindrique métallique, peut entrer en contact avec le fluide caloporteur. Les conséquences de l'interaction qui en résulte sont étudiées par l'Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire (IRSN). La violence de l'interaction dépend notamment fortement de la cinétique de cette mise en contact. La compréhension des phénomènes gouvernant cette cinétique reste limitée, l'observation expérimentale directe du phénomène étant inenvisageable. Ce travail de thèse a consisté en l'étude de cette dynamique. Pour modéliser cette dynamique nous avons étudié le débit de vidange d'un milieu granulaire monodisperse en fonction de plusieurs paramètres prépondérants (géométrie du réservoir ; taille, forme et position de l'orifice ; débit gazeux au sein du milieu granulaire ; taille des grains). Ces études ont été réalisées sur un banc expérimental dédié et ont permis de mettre en évidence plusieurs lois d'échelle pour le régime stationnaire. En support à l'interprétation de ces expériences, différentes hypothèses de modélisation de l'écoulement (population discrète de particules, rhéologie d'un milieu continu) ont été confrontées aux résultats expérimentaux à l'aide de simulations numériques. Ainsi la loi de dépendance classique du débit de vidange d'un silo avec un orifice en bas a été étendue aux silos avec un orifice latéral notamment en clarifiant les contributions relatives aux dimensions verticale et horizontale. Par ailleurs, il a été établi qu'un écoulement de gaz augmente significativement le débit de vidange du granulaire. Ceci peut être modélisé en prenant en compte le gradient de pression imposé par le gaz sur les grains dans la zone de l'orifice en plus de la gravité. Cet effet dépend fortement de la perméabilité du milieu et introduit donc une dépendance du débit à la taille des grains, contrairement au cas du silo ouvert. En outre, une première étude numérique a été menée dans le cas de la vidange d'un milieu granulaire bidisperse. Elle met en évidence une loi de mélange permettant de prédire le débit. Les éléments fondateurs de la modélisation d'une vidange de grains et de gaz au sein d'un réservoir avec un orifice latéral ont pu ainsi être mis en place.

**Mots clés** : matériaux granulaires, vidange, rhéologie d'un milieu granulaire dense, simulation discrète, écoulement de gaz.

**Abstract** - In the hypothetical conditions of a reactivity initiated accident in a nuclear power plant, some of the cylindrical rods, that contain the fuel, could break. If fuel fragmentation occurs, hot fuel particles and pressurized gas could be ejected out of the rod and then interact with the surrounding fluid. The consequences of this interaction are studied by IRSN (Institut de radioprotection et de sûreté nucléaire). The violence of this interaction depends particularly on the discharge rate of the fuel particles. The aim of this thesis, was to study this dynamics. We simulated the fuel particles and gas ejection dynamics by the flow of a dense granular material and a gas from a confined space toward an open space. We focused on the experimental study of the stationary discharge of a silo composed of monodisperse spherical glass beads, with an orifice either lateral or at the bottom of the silo, with or without air flow. The measured parameters were the mass flow rate and the pressure along the silo, whereas the controlled parameters were the size of particles, the size of orifices, and the flow rate of air. To understand the underlying physical mechanism, discrete and continuous numerical simulations were also performed and compared to the experimental results. For the case of a lateral orifice, when the form of the orifice is rectangular, we identified two regimes that depend on the ratio of width to height. For the case with air flow, we found that the flow rate increases significantly with the air flow. We used a simple physical model to describe the grains and gas ejection taking into account the pressure gradient imposed by the fluid on the particles around the orifice. This pressure gradient depends strongly on the permeability of the granular media, therefore the dependance of the flow rate on the particle size becomes important, unlike in the dry case. Finally, we performed a numerical study of the discharge of a bidisperse granular media from a silo. We showed that the flow rate can be described by a simple mixture law on the particle density.

**Keywords** : granular media, discharge, rheology, discrete simulation, air flow

